

Задача 1. Из пункта  $A$  в пункт  $B$ , расстояние между которыми 104 км с постоянной скоростью выезжает автобус. Через 30 мин за ним выезжает мотоциклист со скоростью 40 км/ч, который, догнав автобус, возвращается обратно в пункт  $A$  с прежней скоростью. Найти наибольшее значение скорости (в км/ч) при которой автобус прибывает в пункт  $B$  раньше, чем мотоциклист возвращается обратно в пункт  $A$ .

Задача 2. На стеклянную сферу (показатель преломления  $n = 1,8$ ) параллельно одному из диаметров падает луч на расстоянии 26 мм от диаметра и выходит из сферы, пересекаясь с диаметром. Найти радиус сферы.

Задача 3. В герметически закрытом сосуде в воде плавает кусок льда массой  $M$ , в который вмерзла свинцовая дробинка массой  $m$ . Какое количество теплоты нужно затратить, чтобы дробинка начала тонуть? Плотность свинца  $11,3 \text{ г/см}^3$ , плотность льда  $0,9 \text{ г/см}^3$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda$ . Температура воды в сосуде  $0^\circ\text{C}$ .

Задача 4. Два одинаковых заряженных шарика соединены нитью длиной  $l = 5 \text{ см}$  и с помощью двух нитей такой же длины прикреплены к точке подвеса, причем точка подвеса и шарика лежат в вершинах равностороннего треугольника. После того как нить, соединяющую шарика, перерезали, они начали двигаться с ускорением  $40 \text{ м/с}^2$ . Определите скорость шариков в

момент, когда они окажутся на одном уровне с точкой подвеса.

Задача 5. Нить длины  $l$  с привязанным к ней шариком массы  $m$  отклонили на угол  $90^\circ$  от вертикали и отпустили. На каком наименьшем расстоянии под точкой подвеса нужно установить гвоздь, чтобы нить, налетев на него, порвалась? Нить выдерживает силу натяжения  $T$ .

Решение 5. Из закона сохранения энергии

$$mgl = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = 2gl.$$

Такую скорость приобретет шарик, пройдя положение равновесия. Налетая на гвоздь, с учетом укороченной нити, имеем

$$ma_{\text{ц}} = m \frac{v^2}{R} = T - mg.$$

Решая последнее уравнение, относительно  $R$ , и, учитывая так же, что  $x = l - R$ , находим  $x = \frac{T - 3mg}{T - mg} l$ .

Но объем  $V$  льда и дробинки равен сумме их объемов, то есть  $\frac{M_1}{\rho_L} + \frac{m}{\rho_C}$ . Поэтому

$$M_1 + m = \rho_B \left( \frac{M_1}{\rho_L} + \frac{m}{\rho_C} \right).$$

Отсюда

$$M_1 = m \frac{(\rho_C - \rho_B)\rho_L}{(\rho_B - \rho_L)\rho_C} = 8,2m.$$

Растаять должна масса льда

$$\Delta M = M - M_1 = M - 8,2m.$$

Для этого необходимо количество тепла

$$Q = \lambda \Delta M = \lambda(M - 8,2m).$$

**Решение 4.** В момент перерезания нити скорость шариков равна нулю, и, следовательно, их центростремительное ускорение также равно нулю. Касательное ускорение шариков обеспечивается проекциями кулоновской силы и силы тяжести:

$$ma = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2} \frac{\sqrt{3}}{2} - mg \frac{1}{2}.$$

Искомую скорость шариков можно найти с помощью закона сохранения энергии

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} - 2mgl \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2l} + 2 \frac{mv^2}{2}.$$

Решение этих двух уравнений для скорости  $v$  дает

$$v = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6} l (2a - 5g)} = 0,66 \text{ м/с}.$$

### Решение задач.

**Решение 1.** Свяжем систему координат с автобусом. Остановив автобус, мы тем самым сообщим скорость автобуса мотоциклисту. Следовательно, мотоциклист догонит автобус через время равное

$$t_1 = \frac{l}{v_M - v_A} = \frac{v_A \cdot 0,5}{v_M - v_A} \quad (1),$$

где  $l = v_A \cdot 0,5$  – расстояние между автобусом и мотоциклистом на начало движения мотоциклиста.

Время движения мотоциклиста до встречи, время его обратного движения и время движения автобуса после встречи до пункта В одинаково.

Тогда  $l + x = S$ , где  $l = v_M t$ ,  $x = v_A t$ , тогда  $v_M t + v_A t = S$ .

Подставляя в последнее уравнение (1), имеем

$$v_M \frac{v_A \cdot 0,5}{v_M - v_A} + v_A \frac{v_A \cdot 0,5}{v_M - v_A} = S \text{ или } \frac{v_M v_A \cdot 0,5}{v_M - v_A} + \frac{v_A^2 \cdot 0,5}{v_M - v_A} = S.$$

Преобразуем последнее уравнение

$$v_M v_A + v_A^2 = 2S v_M - 2S v_A \text{ или } v_A^2 + v_A (v_M + 2S) - 2S v_M = 0$$

После подстановки числовых значений

$$v_A^2 + 248 v_A - 8320 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$v_{A1,2} = -124 \pm \sqrt{23696} = -124 \pm 154 \Rightarrow v_A = 30 \text{ (км/ч)}.$$

Отрицательный корень не имеет физического смысла. Автобус движется в направлении выбранной оси координат.

При скорости автобуса  $\geq 30$  км/ч автобус прибывает в пункт В раньше, чем мотоциклист вернется в пункт А.

Решение 7. Сделаем рисунок к задаче.

По закону преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Выразим  $\sin$  угла через радиус и известную сторону  $x$

$$\sin \alpha = \frac{x}{R} \quad (1).$$

В равнобедренном треугольнике  $AOB$  угол  $B$  равен  $\beta$  как накрест лежащий. Тогда угол  $A$  тоже  $\beta$ . Следовательно,  $\beta = \alpha/2$ .

Перепишем уравнение (1)  $\frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} = n.$

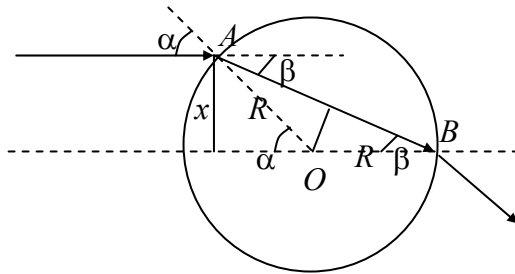
Решим последнее уравнение относительно угла  $\alpha$ .

$$\frac{2 \sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = n^2 \quad \text{или} \quad 2 - 2 \cos^2 \alpha = n^2 - n^2 \cos \alpha.$$

Получили квадратное относительно  $\cos \alpha$ :

$$\cos^2 \alpha - \frac{n^2}{2} \cos \alpha + \left( \frac{n^2}{2} - 1 \right) = 0.$$

Корни этого уравнения



$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{\frac{n^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{n^2}{2} - 1\right)}}{2} \quad \text{или}$$

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{n^2}{4} \pm \sqrt{\frac{n^4}{16} - \left(\frac{n^2}{2} - 1\right)}.$$

Подставим  $n = 1,8$  последнее выражение

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{1,8^2}{4} \pm \sqrt{\frac{1,8^4}{16} - \left(\frac{1,8^2}{2} - 1\right)} = 0,81 \pm 0,19.$$

Тогда

$$\cos \alpha_1 = 0,81 + 0,19 = 1, \quad \cos \alpha_2 = 0,81 - 0,19 = 0,62.$$

Если  $\cos \alpha_1 = 1$ , то  $\alpha_1 = 0$ , а это означает, что угол между падающим лучом и перпендикуляром (радиусом) равен нулю, что противоречит условию задачи. Следовательно,  $\cos \alpha_2 = 0,62$  и  $\sin \alpha_2 = 0,78$ .

$$R = \frac{x}{\sin \alpha_2} = \frac{26 \cdot 10^{-3}}{0,78} \approx 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Решение 3. Для того чтобы дроби́нка начала тонуть, нет необходимости в том, чтобы растаял весь лед. Достаточно, если средняя плотность льда с дроби́нкой станет равна плотности воды. Если массу оставшегося при этом льда обозначить  $M_1$ , то условие того, что дроби́нка начнет тонуть, запишется так:

$$\frac{M_1 + m}{V} = \rho_B.$$