11 класс 2005/2006 г.

Задача 1. Два плоских зеркала образуют двугранный угол φ. На одно из зеркал падает под углом α к его поверхности световой луч, лежащий в плоскости, перпендикулярной общему ребру двух зеркал. При каком соотношении углов φ и α вышедший луч антипараллелен падающему лучу, если известно, что а) луч отражается от каждого из зеркал по одному разу; б) луч отражается от каждого из зеркал по два раза?

Задача 2. На грампластинку, вращающуюся в горизонтальной плоскости с частотой 33 об/мин, попал жук. Радиус пластинки 20 см. Масса жука $m = 5{,}0\cdot10^{-4}$ кг.

2.1. Какой должен быть минимальный коэффициент трения между пластинкой и лапками жука, чтобы он мог обежать пластинку по периметру за 10 с.

2.2. Завершив полный круг, жук направился к центру пластинки, двигаясь радиально с постоянной скоростью (относительно пластинки) 7,0 см/с. Найдите величину и направление силы трения, действующей на жука, когда он находился на расстоянии 15 см от центра.

2.3. Какую работу совершил жук, перебежав от края пластинки к ее центру?

Задача 3. Два одинаковых алюминиевых шара радиусом r = 1 см с помощью нити длиной L = 100 см соединены между собой, а середина нити прикреплена к штативу. Шары отклоняют в противоположные стороны так, что нить оказывается горизонтальной (рис. 11). В некоторый момент времени их одновременно отпускают. После нескольких соударений движение системы прекращается, а температура шаров увеличивается на Δt_1 = 0,5 °С. Затем алюминиевые шары заменяют на свинцовые такого же размера и опыт повторяют. Вычислите изменение Δt_2 температуры в этом случае.

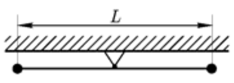


Рис. 11

Удельные теплоемкости алюминия и свинца составляют соответственно c_1 = 920 Дж/(кг·°С) и c_2 = 140 Дж/(кг·°С), а их плотности ρ_1 = 2,7 г/см^3 и ρ_2 = 11,3 г/см^3.

Задача 4. Цилиндрический сосуд закрыт сверху поршнем массой M и площадью S. На нем подпрыгивают N шариков массы m каждый. Найдите давление p газа под поршнем. Соударение шариков с поршнем считать абсолютно упругими. Оцените число шариков N для случая S = 19,64 см^2, $M = m$ = 10 г и p = 1 атм. Атмосферным давлением пренебречь.

Задача 5. Шайба, скользившая по гладкому полу со скоростью v_0 = 12 м/с, поднимается на трамплин, верхняя часть которого горизонтальна и соскакивает с него. При какой высоте трамплина h дальность полета шайбы S будет максимальной?

Задача 6. К металлическому кольцу (r – сопротивление единицы длины) припаян контакт. Второй контакт может свободно перемещаться вдоль кольца. Что покажет омметр, к клеммам которого подсоединены оба контакта, если угол, меду радиусами, которые соединяют центр кольца с контактами, равен k.

Решение задач.

Решение 1. Покажем ход луча, падающего под углом скольжения α на первое из зеркал, плоскости которых составляют угол φ (рис. 4), при его однократном отражении от зеркал и запишем очевидные геометрические соотношения:

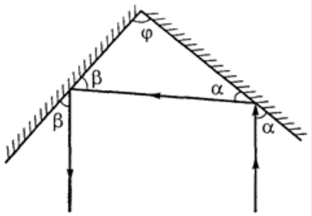


Рис. 4

http://afportal.kulichki.ru

$$\varphi + \alpha + \beta = \pi,\ \alpha + \beta = \varphi .$$

После вычитания второго уравнения из первого получим: $2\varphi = \pi$. Отсюда найдем значение $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, или φ = 90°.

Ход луча с двукратным его отражением от каждого из зеркал показан на рис. 5. Анализируя чертеж, несложно составить следующую систему уравнений:

$$\varphi + \beta + \gamma = \pi;\ \varphi + \beta + \alpha + a = \pi;$$

$$\varphi + \gamma + b + \delta = \pi;\ \alpha + \delta = \varphi.$$

Учитывая, что $\alpha = \pi - 2\beta,\ b = \pi - 2\gamma$, преобразуем записанную систему уравнений к виду:

$$\varphi + \beta + \gamma = \pi;\ \varphi - \beta + \alpha = 0;$$

$$\varphi - \gamma + \delta = 0;\ \alpha + \delta = \varphi.$$

Складывая первые три уравнения и вычитая из полученного соотношения последнее равенство, получим $4\varphi = \pi$, откуда найдем: $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, или φ = 45°.

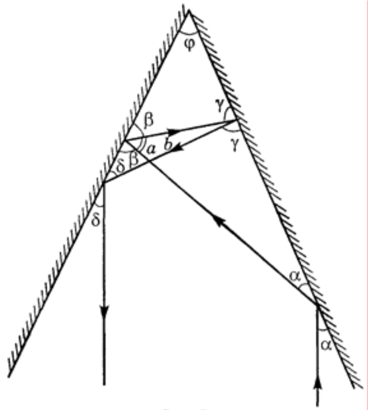


Рис. 5

Решение задачи еще проще, если построить изображение одного зеркала в другом зеркале (рис. 6). Для углов, обозначенных на чертеже, справедливы соотношения:

$$\alpha + 3\varphi + \delta = \pi,\ \alpha + \delta = \varphi ,$$

из которых следует, что $4\varphi = \pi$ и, следовательно, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

При этом, если считать падающий луч идущим из бесконечности, должно выполняться условие α < φ, то есть α < 90° в первом случае и α < 45° – во втором.

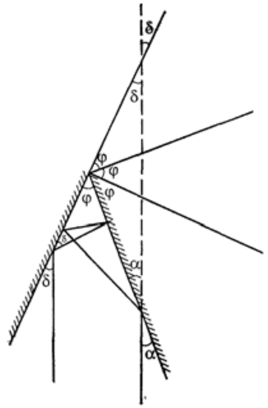


Рис. 6

Решение 2. В инерциальной системе отсчета (ИСО) относительно Земли жук движется с угловой скоростью

$$\omega = 2\pi n \pm \frac{2\pi}{T}.$$

Где знаки соответствуют движению жука по или против направления вращения пластинки.

Следовательно, его центростремительное ускорение

$$a = \omega^2 R = \left(2\pi n \pm \frac{2\pi}{T}\right)^2 R.$$

Согласно основному закону динамики

$$ma = F_{тр} = \mu mg \Rightarrow \mu = \frac{a}{g} = \left(2\pi n \pm \frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R}{g}.$$

Расчеты приводят к следующим значениям: 0.34 для движения в сторону вращения и 0.16 для противоположного направления движения.

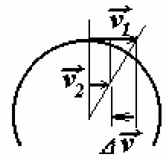
Ищем ускорение жука в ИСО. Центростремительное ускорение

$$a_1 = \omega^2 R_1 = (2\pi n)^2 R_1.$$

Вследствие вращения изменяется направление вектора скорости, т.е.

$$\Delta v = v\Delta\varphi = v\omega\Delta t,\ a_2 = \omega v.$$

С изменением расстояния изменяется и тангенциальная составляющая скорости, что тоже приводит к появлению соответствующей составляющей ускорения



$$\Delta v = \omega\left(R + \Delta R\right) - \omega R = \omega\Delta R,\ a_3 = \omega\frac{\Delta R}{\Delta t} = \omega v,$$

направленной так же как и a_2.

Векторное сложение ускорений позволяет определить полное ускорение

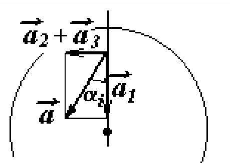
$$a = \sqrt{a_1^2 + \left(a_2 + a_3\right)^2} = \sqrt{\left(2\pi nR\right)^2 + 4\omega^2 v^2} = 1{,}86\ \text{м/с}^2.$$

Соответственно искомая сила трения равна

$$F_{тр} = ma = 9{,}3\cdot 10^{-4}\ \text{Н}.$$

Заметим, что решение данной задачи сводится к вычислению силы Кориолиса.

Для вычисления работы вспомним формулу



$$A = \vec{F}\cdot\vec{S},$$

где $\vec{F}$ – мускульная сила жука. Теперь нужно учесть то, что сила жука при движении постоянно меняется по величине и по направлению, поэтому предлагается следующий способ вычисления

$$A = \sum_i \vec{F}_i\cdot\Delta\vec{S}_i = \sum_i F_i\cdot\Delta r_i\cdot\cos\alpha_i = \sum_i \Delta r_i\left(F_i\cos\alpha_i\right) = \left\{F_i\cos\alpha_i = ma_{1i}\right\} =$$

$$= \sum_i m\omega^2 r_i\Delta r_i = m\omega^2\sum_i r_i\Delta r_i = m\omega^2\frac{r^2}{2} = 1{,}19\cdot 10^{-4}\ \text{Дж}.$$

Решение 3. Изменение потенциальной энергии системы $\Delta E = -2mgL/2 = -mgL$, где m – масса шара, g – ускорение свободного падения. Изменение внутренней энергии шаров $\Delta U = c\cdot 2m\cdot\Delta t$. По закону сохранения энергии

$$\Delta E + \Delta U = 0 \Rightarrow gL = 2c_1\Delta t_1 = 2c_2\Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \Delta t_1\frac{c_1}{c_2} \approx 3{,}3\ ^\circ\text{C}.$$

Решение 4. Так как поршень находится в состоянии равновесия, то давление газа под поршнем равно сумме давления поршня и среднего давления шариков:

$p = \dfrac{Mg}{S} + N\overline{p},\ \overline{p}$ – среднее давление одного шарика ($\overline{p} = \dfrac{\overline{F}}{S}$).

Среднюю силу взаимодействия $\overline{F}$ шарика с поршнем определим из второго закона Ньютона $\Delta p = \overline{F}\Delta t$, где $\Delta p = 2mv$ – изменение импульса при упругом соударении шарика с поршнем, Δt – время между двумя последовательными соударениями, v – скорость шарика при соударении с поршнем. Так как шарики двигаются в поле силы тяжести с ускорением свободного падения g, то $v = \dfrac{g\Delta t}{2}$. Таким образом,

$$\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = mg$$

и давление газа под поршнем равно

$$p = \frac{\left(M + Nm\right)g}{S}.$$

При данных, приведенных в условии задачи, для числа шарика получим

$$N = \frac{pS - Mg}{mg} = 2003.$$

Решение 2. Скорость шайбы на вершине трамплина v можно найти с помощью закона сохранения энергии

$$\frac{mv_o^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Высота трамплина и дальность полета шайбы связаны со временем полета t формулами

$$h = \frac{gt^2}{2},\ S = vt.$$

Из записанных выше равенств получим зависимость дальности полета шайбы от высоты трамплина:

$$S = \sqrt{\frac{2h}{g}(v_o^2 - 2gh)} = 2\sqrt{\left(\frac{v_o^2}{4g}\right)^2 - \left(h - \frac{v_o^2}{4g}\right)^2}.$$

Очевидно, что дальность полета будет максимальной при условии

$$h = \frac{v_o^2}{4g} = 3{,}6\ \text{м},$$

причем сама максимальная дальность $S = \dfrac{v_o^2}{2g} = 7{,}2$ м.

Решение 14. Предположим, что длина кольца равна L. Кольцо можно условно разбить на две дуги: первая – та, что заключена в угол k и вторая – оставшаяся часть кольца. Две дуги соединены параллельно. Общее сопротивление между клеммами

$$R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = L_1 r\ \text{и}\ R_2 = L_2 r.$$

$$\begin{cases} L_1 + L_2 = L \\ \dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{k}{2\pi - k} \end{cases} \Rightarrow L_1 = L\frac{k}{2\pi},\ L_2 = \frac{2\pi - k}{2\pi}.$$

Подставив полученные значения L_1 и L_2 в формулу для R и выполнив необходимые алгебраические преобразования получим:

$$R = Lrk\frac{2\pi - k}{4\pi^2}.$$