А.В. Андриевский
А.А. Мищук
Л.Г. Маркович
А.И. Слободянюк

Республиканская физическая олимпиада

Теоретический тур
Решения задач

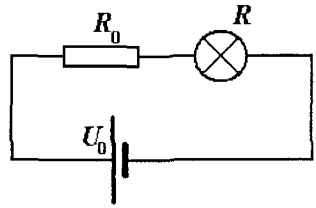
г. Минск
2007 год.

Решения задач.

9 класс.

Задание 1. «Разминка»

1.1 Лампочка.



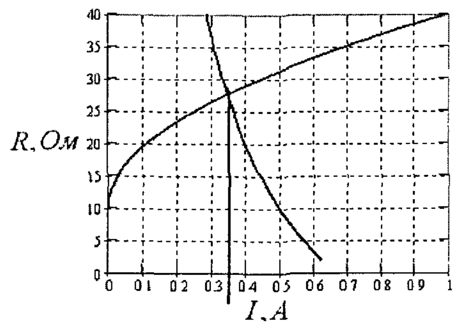
Решение данной задачи фактически сводится к решению двух уравнений, одно из которых задано графически в виде зависимости сопротивления лампочки от силы протекающего тока. Второе уравнение следует из закона Ома

$$I(R_0 + R) = U_0, \qquad (1)$$

где $U_0 = 20 В$ - напряжение источника, $R_0 = 30 Ом$ - сопротивление, последовательно включенного резистора. Из уравнения (1) выразим

$$R = \frac{U_0}{I} - R_0 \qquad (2)$$

и построим график этой функции (прямо на представленном графике) Точка пересечения двух графиков и будет решением По графику находим, что значение силы тока в цепи приблизительно равно $I = 0{,}35 A$.



Решение также легко получить методом простой итерации. Берём на вскидку некоторое значение тока в цепи, из графика находим соответствующее значение $R_л$, подставляем его в формулу (3) и вычисляем новое значение тока.

$$I_{n+1} = \frac{U}{R + R_л(I_n)} \qquad (3).$$

Результаты вычислений для $I_0 = 0{,}5 A$ приведены в таблице

n	I, A	$R, Ом$
0	0,5	32
1	0,32	26
2	0,36	27
3	0,35	27

Таким образом, ток в цепи равен. $\boxed{I = 0{,}35 A}$

1.2 «Виброход»

При скольжении бруска по ленте транспортера его ускорение определяется из уравнения второго закона Ньютона

$$ma = \mu mg \quad \Rightarrow \quad a = \mu g\,. \tag{1}$$

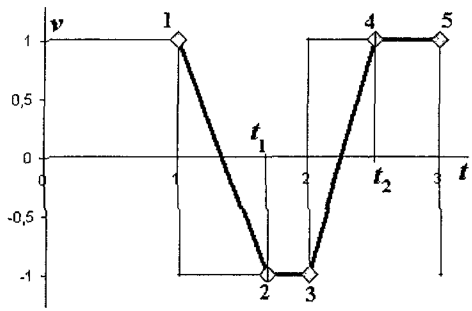
Численные значения этих ускорений

$$a_1 = \mu_1 g = 0{,}30 \cdot 9{,}81 \approx 2{,}94 \frac{м}{с^2},$$
$$a_2 = \mu_2 g = 0{,}40 \cdot 9{,}81 \approx 3{,}92 \frac{м}{с^2} \tag{2}$$

таковы, что за одну секунду брусок успевает изменить свою скорость и достичь «новой» скорости ленты.

Рассмотрим подробнее периодический процесс движения бруска.

Итак, пусть брусок движется вместе с лентой вправо (точка 1 на графике). В этом момент времени скорость ленты изменяется на противоположную, однако брусок некоторое время продолжает по инерции двигаться в прежнем направлении, затем направление его движения изменяется, наконец, его скорость сравнивается со скоростью ленты (т. 2), после чего он движется, оставаясь неподвижным относительно ленты, до тех пор, пока скорость ленты не изменится на противоположную (т.3).



Время изменения скорости бруска (время его ускоренного движения) легко найти

$$t_1 = \frac{2V}{\mu_1 g}\quad . \tag{3}$$

Очевидно, что среднее смещение бруска за это время равно нулю. Смещение бруска за оставшейся промежуток времени (до изменения направления скорости ленты будет равно

$$\Delta x_1 = -V(\tau - t_1) = -V\left(\tau - \frac{2V}{\mu_1 g}\right). \tag{4}$$

Аналогичные рассуждения для движения ленты в противоположном направлении, приводят к аналогичной формуле, определяющей смещение бруска

$$\Delta x_2 = V(\tau - t_2) = V\left(\tau - \frac{2V}{\mu_2 g}\right). \tag{5}$$

Таким образом, суммарное смещение бруска за время 2τ будет равно

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = -V\left(\tau - \frac{2V}{\mu_1 g}\right) + V\left(\tau - \frac{2V}{\mu_2 g}\right) = \frac{2V^2}{g}\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right), \tag{6}$$

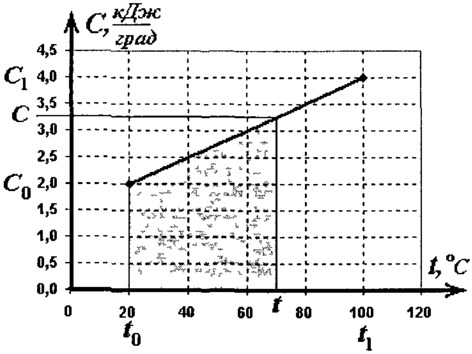
следовательно, средняя скорость бруска равна

$$\boxed{V_{ср} = \frac{\Delta x}{2\tau} = \frac{V^2}{g\tau}\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right) = \frac{1{,}0^2}{9{,}81 \;\; 1{,}0}\left(\frac{1}{0{,}30} - \frac{1}{0{,}40}\right) \approx 0{,}085 \frac{м}{с}} \tag{7}$$

1.3 «Переменная теплоемкость»

Количество теплоты, которое требуется на нагревание тела до некоторой температуры t, численно равно площади под графиком зависимости теплоемкости от температуры. Выразим это количество теплоты

$$Q(t)=\frac{1}{2}\left(C_0+C(t)\right)(t-t_0). \qquad (1)$$



Значения теплоемкости тела при температуре t можно выразить из графика линейной зависимости

$$C(t)=C_0+\frac{C_1-C_0}{t_1-t_0}(t-t_0). \qquad (2)$$

С другой стороны количество поступающей теплоты выражается через мощность нагревателя

$$Q=P\tau, \qquad (3)$$

здесь τ - время нагревания.

Таким образом, для определения зависимости температуры бруска от времени имеем квадратное уравнение

$$\frac{1}{2}\left(C_0+C_0+\frac{C_1-C_0}{t_1-t_0}(t-t_0)\right)(t-t_0)=P\tau. \qquad (4)$$

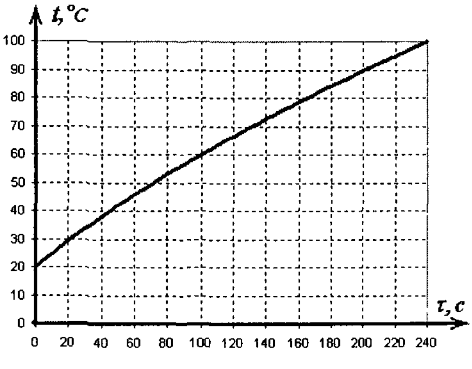
Решение которого не составляет труда (отрицательный корень отбрасываем)

$$(t-t_0)=\frac{\sqrt{4C_0^2+8P\tau\frac{C_1-C_0}{t_1-t_0}}-2C_0}{2\frac{C_1-C_0}{t_1-t_0}}$$

Подстановка численных значений приводит к функции, описывающей зависимость температуры от времени (время задается в секундах):

$$t(\tau)=20\sqrt{16+0{,}20\tau}-60. \qquad (6)$$

График этой функции показан на рисунке.



Задание 2 «Вверх – вниз»

1) Рассмотрим струю жидкости радиусом r, движущуюся со скоростью υ_0 по трубе. За промежуток времени Δt через произвольное поперечное сечение AB (рис. 3) струи площадью $S=\pi r^2$ пройдет жидкость объемом

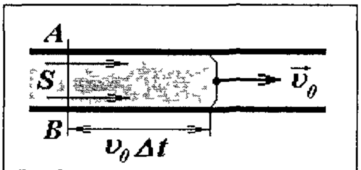


Рис 3

$$V=S\cdot h=S\,\upsilon_0\Delta t=\pi r^2\upsilon_0\Delta t\,.$$

Соответственно для массового расхода в этом случае получаем

$$q=\frac{m}{\Delta t}=\frac{\rho V}{\Delta t}=\frac{\rho\pi r^2\upsilon_0\Delta t}{\Delta t}=\rho\pi r^2\upsilon_0\,. \qquad (1)$$

Из (1) найдем скорость жидкости в вертикальном сечении струи

$$\upsilon_0=\frac{q}{\rho\pi r^2}=5,6\frac{м}{с}\,. \qquad (2)$$

2) Поскольку жидкость несжимаема, то объем жидкости, попавший на поверхность за некоторый промежуток времени t должен быть равен объему цилиндра, который образует жидкость при растекании по поверхности (см. рис. 01).

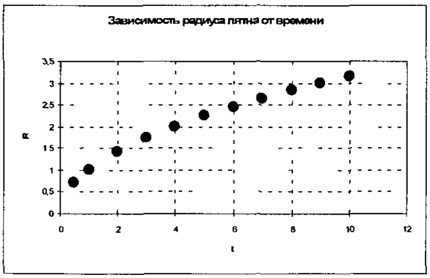
Пусть радиус пятна в рассматриваемый момент $R(t)$, тогда объем образовавшегося цилиндра найдем как $V=S\cdot h=\pi R^2(t)\cdot h$.

Из этого условия следует, что

$$m=qt=\rho V=\rho\pi R^2(t)h\,.$$

Из последнего равенства находим

$$R(t)=\sqrt{\frac{qt}{\rho\pi h}}\,. \qquad (3)$$



Таким образом, радиус пятна растекания жидкости по поверхности увеличивается с течением времени прямо пропорционально квадратному корню из времени течения

$$R(t)\propto\sqrt{t}\,.$$

Примерный график полученной зависимости (3) приведен ниже.

3) Пусть за малый промежуток времени Δt радиус пятна увеличился на ΔR ($\Delta R \ll R$) (рис. 4). Жидкость, поступившая на поверхность за промежуток времени Δt, «заполнит» выделенное на рисунке кольцо (сильно увеличено)

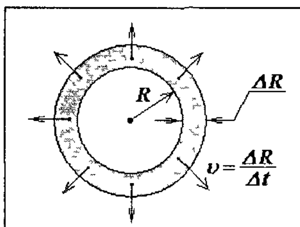


Рис 4

Согласно полученному выражению (3) можем записать следующие равенства

$$R^2=\frac{q}{\rho\pi h}\cdot t \qquad (4)$$

$$(R+\Delta R)^2=\frac{q}{\rho\pi h}\cdot(t+\Delta t)\,. \qquad (5)$$

Вычитая из (5) равенство (4), найдем связь между малыми величинами Δt и ΔR

$$2R\Delta R + \Delta R^2 = \frac{q}{\rho\pi h}\ \Delta t\,.$$

Поскольку $\Delta R \ll R$, то в последнем равенстве можно пренебречь ΔR^2 по сравнению со слагаемым $2R\Delta R$.

Соответственно, для скорости $\upsilon(t)$ движения границы пятна по поверхности получаем

$$\upsilon(t) = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{q}{\rho\pi h}\cdot\frac{1}{2R} = \left\{R(t) = \sqrt{\frac{qt}{\rho\pi h}}\right\} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{\rho\pi h}\cdot\frac{1}{t}}\,. \qquad (6)$$

Таким образом, согласно (6) скорость $\upsilon(t)$ движения границы пятна убывает обратно пропорционально квадратному корню от времени

$$\upsilon(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}\,.$$

Для определения функции $\upsilon(t)$ можно также найти производную от выражения (3) по времени, что несколько быстрее приводит к ответу

$$\upsilon(t) = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \left(\sqrt{\frac{qt}{\rho\pi h}}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{\rho\pi h t}}\,. \qquad (7)$$

Для получения графика (таблицы) зависимости (6) можно также «вручную» обработать зависимость (3) скажем, для 10 точек и нанести точки на график (см. рис.). При этом получается монотонно убывающий график искомой зависимости $\upsilon(t)$.

4) Радиус водяного купола на земле определяется величиной r, а также начальной горизонтальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$ струи на выходе из Т – образной конструкции (рис. 5) и временем $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ полета (падения) частиц воды с высоты H

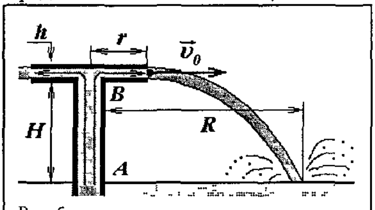


Рис 5

$$R = r + \upsilon_0 t$$

Масса воды, входящей в трубу AB, должна быть равна массе воды, выходящей через боковую поверхность конструкции (купола) В противном случае вода накапливалась бы в куполе, чего не происходит.

Это соображение позволит нам вычислить начальную горизонтальную скорость $\vec{\upsilon}_0$ воды на выходе из купола

Если мысленно «развернуть» боковую поверхность Т - образной конструкции, через которую выходит вода, то получим прямоугольник (выделен на рис. 6) со сторонами h и $2\pi r$.

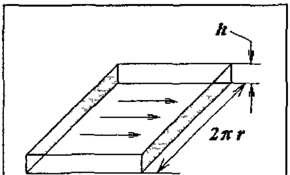


Рис 6

Следовательно, расход воды через боковую поверхность купола можем записать в виде

$$q\Delta t = \rho\, 2\pi\, r\, h\, \upsilon_0 \Delta t \qquad \Rightarrow \qquad \upsilon_0 = \frac{q}{2\pi\,\rho\, r\, h}$$

Соответственно, радиус водяного купола найдем, зная время падения воды и ее начальную скорость

$$R = r + \upsilon_0 t = r + \frac{q}{2\pi\rho r h}\sqrt{\frac{2H}{g}} \tag{8}$$

Расчет по (8) дает

$$R = 1\ 2\,м$$

Как следует из (8), при уменьшении h в $\eta = 2\ 0$ раза новый радиус купола на земле

$$R' = r + \upsilon_0 t = r + \frac{q}{\pi\rho r h}\sqrt{\frac{2H}{g}} = 2{,}3\,м\,,$$

увеличится в $\eta = \frac{R'}{R} = 1\ 9$ раза

Интересно, что в действующих установках «водяных куполов» при большом значении H поверхностное натяжение может даже «схлопнуть» купол так, что его радиус практически станет равным нулю Однако при небольшой высоте купола влиянием поверхностного натяжения можно пренебречь

Задание 3 «Кинематическая диаграмма»

1. Доказательство можно провести формально Центр масс системы, состоящей из двух материальных точек, определяется радиус-вектором

$$\vec{r}_{ЦМ} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}_2 \tag{1}$$

Аналогично определяется скорость центра масс

$$\vec{v}_{ЦМ} = \frac{\Delta\vec{r}_{ЦМ}}{\Delta t} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_2 \tag{2}$$

Т е вектор скорости центра масс составляется так же как вектор центра масс Поэтому его конец (а точки на диаграмме соответствуют концам векторов скоростей, начало которых – в начале координат) также лежит между точками, соответствующими скоростям движения отдельных частиц

2. Как следует из предыдущего пункта, точка, соответствующая центру масс до соударения должна лежать на отрезке 12, а после соударения на отрезке $1'2'$ Кроме того, в результате столкновения скорость центра масс не изменяется Значит, центр масс находится на пересечении этих отрезков Обозначим эту точку буквой O

3. Чтобы доказать, что четырехугольник $11'22'$ является равнобокой трапецией, достаточно доказать, что треугольники $1O1'$ и $2O2'$ являются равнобедренными Действительно, в этом случае они окажутся подобными, а значит $\angle 1'1O = \angle 2'2O$, т е прямые $11'$ и $22'$ параллельны Кроме того, из равнобедренности этих треугольников следует равенство треугольников $1O2'$ и $2O1'$, а значит и равенство «боков» трапеции

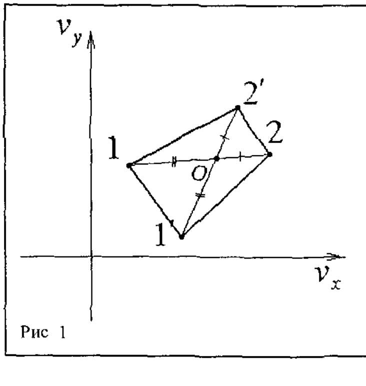


Рис 1

С физической точки зрения равнобедренность упомянутых треугольников означает, что скорости движения частиц относительно их общего центра масс остается неизменной при соударении Докажем это далеко не очевидный факт

Обозначим скорость движения первой частицы относительно центра масс до соударения $\vec{u}_1$, а после столкновения – $\vec{u}_1'$ Аналогично для второй частицы $\vec{u}_2$ и $\vec{u}_2'$ Закон сохранения импульса, записанный в системе центра масс до соударения

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = \vec{0} \quad (3)$$

Аналогично после соударения

$$m_1\vec{u}_1' + m_2\vec{u}_2' = \vec{0} \quad (4)$$

Т к в этой системе отсчета частицы движутся навстречу друг другу, то вектора $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ противоположно направлены Т е законы сохранения импульса принимает вид

$$m_1u_1 = m_2u_2 \quad (5)$$

$$m_1u_1' = m_2u_2' \quad (6)$$

Кроме того (удар абсолютно упругий) выполняется закон сохранения механической энергии

$$\frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} = \frac{m_1u_1'^2}{2} + \frac{m_2u_2'^2}{2} \quad (7)$$

Выражая u_1 из (5), а u_1' из (6) и подставляя в (7), получим, что $u_1 = u_1'$ Аналогично и $u_2 = u_2'$ Что и требовалось доказать

Это можно легко понять исходя из следующих рассуждений В системе центра масс скорость второй (первой) частицы однозначно выражается через скорость первой (второй) Значит кинетическая энергия системы, также однозначно определяется скоростью первой (второй) частицы А раз механическая энергия сохраняется, то неизменной остается и скорость первой (второй) частицы

4. Из предыдущего доказательства следует, что при рассеянии возможны только ситуации, когда $u_1 = u_1'$ и $u_2 = u_2'$ Значит, геометрическое место точек всех возможных рассеяний представляет собой две окружности с общим центром масс и радиусами u_1 и u_2 (см рис 2)

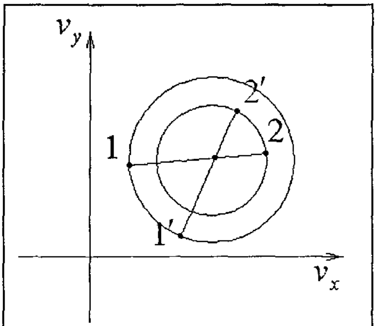


Рис 2

5. Это столкновение изображено на рисунке 3 Точка $2'$, также как и точка 2, будет находиться на окружности большего радиуса Вспомним еще раз, что точки на диаграмме соответствуют концам векторов скоростей, начало которых находится в начале координат Угол $212'$ и есть угол, на который поворачивается вектор скорости Как видно, вектор скорости легкой частицы может повернуться на любой угол от нуля до 180 градусов в том или другом направлении

6 В этом пункте ситуация иная Теперь скорость рассеиваемой частицы принадлежит окружности меньшего радиуса (см рис 4) Поэтому максимальное отклонение вектора скорости реализуется

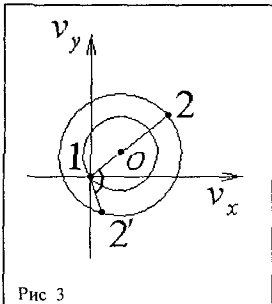


Рис 3

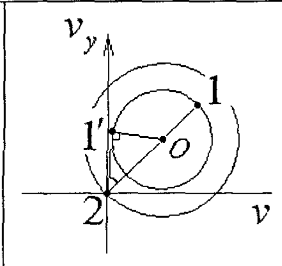


Рис 4

только в том случае, когда $21' \perp O1'$ Максимальный угол легко находится из треугольника $21'O$

$$\sin\alpha_{\max} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{m_2}{m_1} \tag{8},$$

т к $u_1 = \dfrac{m_2 v_1}{m_1 + m_2}$, а $u_1 = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$