# Республиканская физическая олимпиада (III этап)

# 2007 год

## Теоретический тур
## Решения задач

## 10 класс.

**Задание 1. «Просто разминка»**

1.1 Очевидно, что скорость трактора равна $V = \frac{V_0}{2} = 1{,}0\frac{м}{с}$

1.2 Дальность полета снаряда, выпущенного из неподвижного орудия, определяется формулой

$$S_0 = \frac{2V_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$

где $V_0$ - скорость снаряда относительно ствола

Чтобы достичь максимальной дальности, выстрел, очевидно, необходимо производить в направлении движения платформы В этом случае к горизонтальной составляющей скорости снаряда относительно пушки добавится скорость движения платформы, поэтому закон движения снаряда будет иметь вид

$$\begin{aligned} x &= (V_0\cos\alpha + v_1)t \\ y &= V_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \qquad (2)$$

Определим время полета снаряда (из условия $y = 0$) $t_1 = \frac{2V_0\sin\alpha}{g}$ и подставим его в выражение для горизонтальной координаты для определения дальности полета

$$S_1 = (V_0\cos\alpha + v_1)\frac{2V_0\sin\alpha}{g} = \frac{2V_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\left(1 + \frac{v_1}{V_0\cos\alpha}\right)$$

Таким образом, относительное увеличение дальности полета составит

$$\frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{v_1}{V_0\cos\alpha} = 10\%$$

*При наличии понимания, решение может быть получено почти мгновенно*

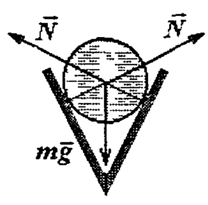
*- так как время полета снаряда определяется только вертикальной составляющей скорости, то оно не зависит от скорости платформы,*

*- дальность полета (при постоянном времени движения) пропорциональна горизонтальной составляющей скорости снаряда*

*- следовательно,* $\frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{(V_0\cos\alpha + v_1) - V_0\cos\alpha}{V_0\cos\alpha} = \frac{v_1}{V_0\cos\alpha} = 10\%$

1.3 Чтобы сдвинуть цилиндр, к нему необходимо приложить силу, превышающую силу трения

Изобразим силы, действующие на цилиндр в проекции на вертикальную плоскость Так как силы реакции направлены перпендикулярно поверхности, то тройка сил две силы реакции и сила тяжести направлены под равными углами 120° друг к другу Так проекция ускорения на вертикальную плоскость равна нулю, то сумма изображенных сил также равна нулю Следовательно, модули этих сил равны, то есть $N = mg$ Таким образом, суммарная сила трения (и искомая сила) равна $F_р = 2\mu N = 2\mu mg = 12H$



1.4 Суммарная сила давления воды на дно и стенки сосуда по модулю равна силе тяжести и направлена в противоположную сторону $\rho ghS + F_{cm} = mg$ Из этого уравнения находим $F_{cm} = mg - \rho ghS \approx -10H$, т е эта сила направлена вверх

1.5 Обозначим начальную скорость второго шарика $u_0$ и найдем скорости шариков $v_1$ и $v_2$ после первого столкновения (Рис 1), используя уравнения законов сохранения импульса и механической энергии

$$m_2 u_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \qquad (1)$$

$$\frac{m_2 u_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \qquad (2)$$

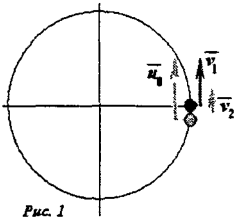


*Рис. 1*

Для быстрого решения этой системы уравнений перепишем ее в виде

$$m_2(u_0 - v_2) = m_1 v_1, \qquad (3)$$

$$m_2(u_0^2 - v_2^2) = m_1 v_1^2. \qquad (4)$$

и разделим второе уравнение на первое. При этом мы, конечно, теряем одно решение системы

$$v_2 = u_0,\ v_1 = 0, \qquad (5)$$

но это решение соответствует начальным условиям – скоростям шарика до удара, а нам необходимо второе решение

$$u_0 + v_2 = v_1.$$

Подстановка этого соотношение в уравнение (1) позволяет легко найти интересующее нас решение

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} u_0, \qquad v_1 = \frac{2m_2}{m_2 + m_1} u_0. \qquad (6)$$

Понятно, что скорость первого шарика больше скорости второго, поэтому, совершив полный оборот, первый шарик догонит второй в некоторой точке $A_1$, повернутой относительно исходной на некоторый угол $\varphi$ (Рис 1)

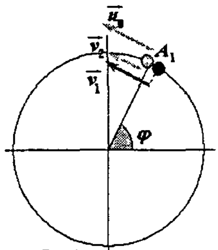


*Рис.2*

Для определения этого угла заметим, что до второго удара первый шарик пройдет путь

$$S_1 = (2\pi + \varphi)R \qquad (7)$$

за время

$$t_1 = \frac{(2\pi + \varphi)R}{v_1}. \qquad (8)$$

Аналогично, для второго шарика можно записать

$$S_2 = \varphi R, \quad t_2 = \frac{\varphi R}{v_1}. \qquad (9)$$

Приравнивая времена движения шариков, получим уравнение

$$\frac{(2\pi + \varphi)R}{v_1} = \frac{\varphi R}{v_2}. \qquad (10)$$

из которого определим искомый угол $\varphi$, задающий положение точки столкновения

$$\varphi = \frac{2\pi}{\frac{v_1}{v_2} - 1}. \qquad (11)$$

Вычислим значение этого угла, используя выражения для скоростей (6)

$$\varphi=\frac{2\pi}{\frac{v_1}{v_2}-1}=\frac{2\pi}{\frac{2m_2}{m_2-m_1}-1}=\frac{2\pi}{\frac{2\ 30}{30-20}-1}\approx\frac{2}{5}\pi \qquad (12)$$

Таким образом, мы определили точку второго столкновения Для определения скоростей шариков после этого удара, следует составить систему уравнений, аналогичную (1)-(2) Однако подробно ее решать нет необходимости, так как ответ почти очевиден если при начальных условиях (5) решением выражаются формулами (6), то теперь (6) являются начальными условиями, следовательно, решение выражается формулами (5) Иными словами, после второго удара шарики восстановят свои начальные скорости – второй будет двигаться со скоростью $u_0$, а первый остановится! После второго удара второй шарик сделает полный оборот и столкнется с первым в той же точке $A_1$ После этого повторится рассмотренная ситуация (только повернутая на угол $\varphi$) первый догоняет второй и т д Эти рассуждения позволяют указать точки всех столкновений шариков (Рис 3) Простым перечислением легко определить, что тринадцатое столкновение произойдет в точке, повернутой относительно исходного положения на угол, равный

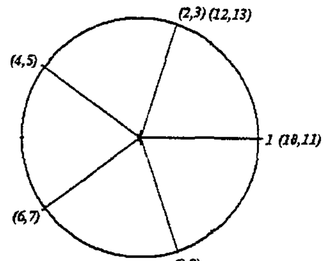


*Рис. 3*

$$\varphi_{13}=\frac{1}{5}\pi\approx 72°$$

**Задание 2. «Вес и сжатие»**

1. **«Самосжатие»**

1.1 Рассмотрим слой воды малой толщины $\Delta h_i$, находящийся на глубине $h_i$. Уменьшение объема $\Delta V_i$ рассматриваемого слоя вследствие сжимаемости жидкости запишем как

$$\Delta V_i = V_0(1-\beta\cdot p)-V_0 = -V_0\beta p = -S\Delta h_i\beta p,$$

где $S$ — площадь рассматриваемого слоя

Для оценки будем считать, что плотность жидкости остается приблизительно постоянной, тогда толщина сжатого слоя $\Delta h_i$ *

$$\Delta h_i{}^* = \Delta h_i(1-\beta\cdot p) = \Delta h_i(1-\beta\cdot\rho_0 g h_i),$$

где $\rho_0$ — плотность несжатой жидкости, $g$ — ускорение свободного падения

Соответственно, уменьшение $\delta h_i$ его высоты вследствие эффекта самосжатия найдем как

$$\delta h_i = \rho_0 g\beta h_i\Delta h_i \qquad (1)$$

Для нахождения полного сжатия $\Delta H$ всей жидкости просуммируем (1) по всем глубинам $h_i$

$$\Delta H = \sum_i \delta h_i = \sum_i \rho_0 g\beta h_i\Delta h_i = \rho_0 g\beta\sum_i h_i\Delta h_i = \rho_0 g\beta\frac{H^2}{2}. \qquad (2)$$

Расчет для мирового океана дает

$$\Delta H = 238\,\text{м}.$$

1.2 **«Плотность»** С учетом эффекта самосжатия найдем плотность $\rho$ реальной жидкости на глубине $h$

$$\rho(h) = \frac{m_i}{V_i} = \frac{m_i}{V_0(1-\beta p_i)} = \frac{m_i}{V_0(1-\beta\rho_0 gh)} \approx \rho_0(1+\beta\rho_0 gh). \qquad (3)$$

В (2) учтено, что параметр β (сжимаемость воды) очень мал, поэтому можно с достаточной точностью использовать приближение для малых $x$

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x.$$

Соответственно, относительное увеличение плотности воды в процентах на глубине $H$ найдем как

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\cdot 100\% = \beta\rho_0 gH\cdot 100\% = 4{,}76\%. \qquad (4)$$

Поскольку данные в условии задачи приведены с точностью до трех значащих цифр, то в ответе (4) (и далее[1]) мы также будем оставлять три значащие цифры

Как видим из (4) даже при больших глубинах мирового океана относительное изменение плотности морской воды незначительно и составляет несколько процентов Это позволяет считать жидкости практически несжимаемыми при решении ряда прикладных задач

1.3 **«Давление»** Для вычисления давления $p(h)$ реальной жидкости на глубине $h$ необходимо просуммировать давления, создаваемые более высокими тонкими слоями $\Delta h_i$, которые, согласно закону Паскаля, передаются нижним слоям

$$p(h)=\sum_i p_i=\sum_i \rho_i g\Delta h_i=g\sum_i \rho_i\Delta h_i\,, \qquad (5)$$

где $\rho_i$ — плотность жидкости на глубине $i$- го слоя

Сумма в выражении (4), есть площадь $S$ под графиком $\rho(h)$ зависимости (2) плотности жидкости от глубины, т.е площадь трапеции (рис 02)

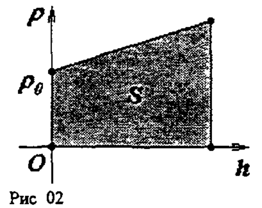


Рис 02

Следовательно

$$p(h)=\frac{\rho_0+\rho_0(1+\beta\rho_0 gh)}{2}h=\rho_0 gh(1+\frac{\rho_0 g\beta}{2}h). \qquad (6)$$

Из (6) следует, что искомая зависимость представляет собой параболу с малым коэффициентом нелинейности

С учетом того, что атмосферное давление $p_0$ также передается по закону Паскаля, окончательно получим

$$p(h)=p_0+\rho_0 gh(1+\frac{\rho_0 g\beta}{2}h). \qquad (7)$$

1.4 **«Утонувший летучий голландец»** Предмет перестанет тонуть и будет находится в состоянии устойчивого равновесия на некоторой глубине при условии, что его плотность будет равна плотности морской воды на этой глубине

Следовательно, плотность утонувшего летучего голландца можно найти, подставив в выражение (3) искомую глубину $h=5{,}00\,км$

$$\rho(h)=\rho_0(1+\beta\rho_0 gh).$$

Расчет с точностью до трех значащих цифр дает

$$\rho_1=1{,}05\cdot10^3\frac{кг}{м^3}.$$

2. ***«Заряженная жидкость»*** *В данном пункте рассматривается несжимаемая жидкость*

2.1 Рассмотрим верхний слой жидкости глубиной $h$ (рис 03) Действующая на него сверху сила атмосферного давления $p_0S$ и сила его тяжести $F_1=\rho ghS$ уравновешиваются силой давления снизу $p(h)S$ и силой электростатического отталкивания $\bar{F}_2$ слоя толщиной $h$ слоем толщиной $(H-h)$.

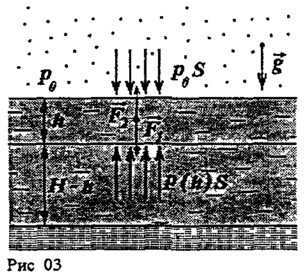


Рис 03

Напряженность электростатического поля, создаваемого слоем толщиной $(H-h)$ вне его может быть найдена, как

$$E(H-h)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\gamma(H-h)}{2\varepsilon_0}.$$

Заряд слоя толщиной $h$ найдем по определению объемной плотности заряда

$$q(h)=\gamma\cdot V=\gamma hS.$$

Следовательно, сила электростатического отталкивания верхнего слоя нижним равна

$$F_2 = E(H-h)\ q(h) = \gamma^2 \frac{(H-h)}{2\varepsilon_0} hS \tag{8}$$

В результате условие равновесия слоя глубиной $h$ примет вид

$$p_0 S + \rho g h S = \gamma^2 \frac{(H-h)}{2\varepsilon_0} hS + p(h)S$$

Сокращая в последнем выражении на площадь $S$ слоя, получим искомую зависимость давления в заряженной жидкости от глубины

$$p(h) = p_0 + (\rho g - \frac{\gamma^2 H}{2\varepsilon_0})h + \frac{\gamma^2}{2\varepsilon_0} h^2 \tag{9}$$

2.2 Выражение (8) представляет собой квадратичную зависимость (параболу), ветви которой направлены вверх

При малых $h$ ($h \to 0$) ее «поведение» определяется линейным членом, который, в зависимости от толщины пластины $H$ может быть как положительным, так и отрицательным При максимально возможной толщине пластины $H_{max}$ линейный член должен быть равен нулю

При этом верхние слои жидкости станут невесомы, т е $p(h \to 0) \approx p_0$ Отсюда найдем

$$\rho g = \frac{\gamma^2 H}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad H_{max} = \frac{2\rho g \varepsilon_0}{\gamma^2}. \tag{10}$$

При дальнейшем увеличении толщины заряженного слоя верхние частицы жидкости будут отрываться и улетать вверх, образуя «электрическое испарение»

2 3 Кубик некоторой массы, погруженный в заряженную жидкость, будет находиться в равновесии, если сила его тяжести будет уравновешена силой Архимеда

Погружение кубика в заряженную жидкость не изменит распределения ее давления в нижележащих слоях

Это позволяет записать следующее уравнение

$$mg = ((\rho g - \frac{\gamma^2 H}{2\varepsilon_0})a + \frac{\gamma^2}{2\varepsilon_0} a^2) \cdot a^2 .$$

Отсюда найдем искомое значение массы кубика

$$m = \frac{((\rho g - \frac{\gamma^2 H}{2\varepsilon_0})a + \frac{\gamma^2}{2\varepsilon_0} a^2) \cdot a^2}{g}. \tag{11}$$

**Задание 3. «Осторожней на поворотах»**

1 Легко заметить из рисунка 1, что наличие угла увода у передних колёс уменьшает угол поворота, а у задних – увеличивает Т е

$$\theta = \xi - \varphi_П + \varphi_З \qquad (1)$$

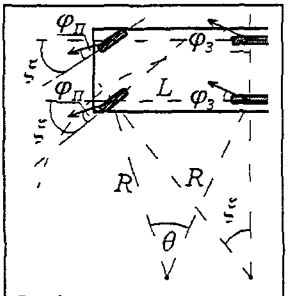


Рис 1

2 Нагрузки на колёса равны силам реакции дороги на эти колеса. Для нахождения этих величин необходимо записать второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось, а также уравнения для равенства моментов относительно нескольких осей, чтобы получить четыре независимых уравнения Однако можно поступить проще Если автомобиль покоится, то силы реакции определить не трудно

$$N^0_{ПЛ} = N^0_{ПП} = \frac{1}{2}\frac{Mgb}{L}$$
$$N^0_{ЗЛ} = N^0_{ЗП} = \frac{1}{2}\frac{Mga}{L} \qquad (2).$$

При левом повороте, к правым колёсам приложится дополнительная нагрузка $\Delta N = \frac{1}{2}\frac{Mv^2}{R}\frac{h}{d}$, а сила, действующая на левые колеса, наоборот уменьшится на эту величину Получим

$$N_{ПЛ} = \frac{1}{2}\frac{Mgb}{L} - \frac{1}{2}\frac{Mv^2}{R}\frac{h}{d}$$
$$N_{ПП} = \frac{1}{2}\frac{Mgb}{L} + \frac{1}{2}\frac{Mv^2}{R}\frac{h}{d}$$
$$N_{ЗЛ} = \frac{1}{2}\frac{Mga}{L} - \frac{1}{2}\frac{Mv^2}{R}\frac{h}{d} \qquad (3)$$
$$N_{ЗП} = \frac{1}{2}\frac{Mga}{L} + \frac{1}{2}\frac{Mv^2}{R}\frac{h}{d}$$

3 Запишем условие равенства моментов сил относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести автомобиля

$$(F_{ПЛ} + F_{ПП})\cdot a = (F_{ЗЛ} + F_{ЗП})\ b \qquad (4),$$

т е автомобиль не вращается. Подставляя значения сил, получим

$$(k\varphi_П N_{ПЛ} + k\varphi_П N_{ПП})\cdot a = (k\varphi_З N_{ЗЛ} + k\varphi_З N_{ЗП})\cdot b \qquad (5)$$

или

$$\varphi_П \cdot a \cdot (N_{ПЛ} + N_{ПП}) = \varphi_П \cdot b \cdot (N_{ПЛ} + N_{ПП}) \qquad (6).$$

Подставив значения нагрузок, получим

$$\varphi_П = \varphi_З \qquad (7),$$

а значит

$$\theta = \xi \qquad (8)$$

– нейтральная поворачиваемость

4 Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось «центр тяжести автомобиля – центр кривизны поворота»

$$F_{ПП} + F_{ПЛ} + F_{ЗЛ} + F_{ЗП} = \frac{Mv^2}{R} \qquad (9)$$

или, подставляя значения сил, и учитывая, что $\varphi_П = \varphi_З = \varphi_{кр}$,

$$kMg\varphi_{кр} = \frac{Mv^2}{R} \quad (10).$$

Максимальная скорость равна

$$v_{max} = \sqrt{k\varphi_{кр}Rg} \quad (11).$$

5. Рассмотрим движение в левом повороте. При наличии схождения передних колёс, углы увода левого и правого колёс отличаются от некоторого среднего значения $\varphi_П$ на величину $\delta$, т.е.

$$\begin{aligned} \varphi_{ПП} &= \varphi_П + \delta \\ \varphi_{ПЛ} &= \varphi_П - \delta \end{aligned} \quad (12).$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось «центр тяжести автомобиля – центр кривизны поворота» и условие равенства моментов сил относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести автомобиля:

$$\begin{cases} kN_{ПЛ}(\varphi_П - \delta) + kN_{ПП}(\varphi_П + \delta) + k\varphi_З(N_{ЗЛ} + N_{ЗП}) = \dfrac{Mv^2}{R} \\ (kN_{ПЛ}(\varphi_П - \delta) + kN_{ПП}(\varphi_П + \delta)) \cdot a = k\varphi_З(N_{ЗЛ} + N_{ЗП}) \cdot b \end{cases} \quad (13).$$

Решение системы:

$$\varphi_З = \frac{v^2}{gkR} \text{ и } \varphi_П = \frac{v^2}{gkR} - \delta\frac{v^2hL}{Rdgb} \quad (14).$$

Угол поворота:

$$\theta = \xi - \varphi_П + \varphi_З = \xi + \delta\frac{v^2hL}{Rdgb} \quad (15).$$

Необходимо учесть, что $R = \dfrac{L}{\theta}$, тогда

$$\theta = \xi + \delta\frac{v^2h}{dgb}\theta \quad (16).$$

Выражая $\theta$, получим:

$$\theta = \frac{\xi}{1 - \delta\dfrac{v^2h}{dgb}} \quad (17).$$

Делаем вывод: при положительном $\delta$ $\theta > \xi$ – автомобиль обладает избыточной поворачиваемостью, при $\delta < 0$ – недостаточной.

6. При определённой скорости движения знаменатель в формуле (17) обращается в нуль. Это значит, что при малейшем движении руля, угол поворота становится очень большим и автомобиль разворачивается. Значение критической скорости:

$$v_{crit} = \sqrt{\frac{dgb}{\delta \cdot h}} \quad (18).$$

7. По-прежнему рассматриваем левый поворот. Необходимо определить, какое колесо первым потеряет сцепления с дорогой. Предположим, что это будут задние колёса. Для того чтобы это произошло, необходимо, чтобы

$$v^2 = \varphi_{кр}gkR \quad (19).$$

В этом случае значение максимальной скорости совпадает со значением, полученным в пункте 4:

$$v_{max} = \sqrt{k\varphi_{кр}Rg} \quad (20)$$

Однако необходимо проанализировать, действительно ли задние колёса сорвутся первыми Единственным «конкурентом» является переднее правое колесо.

Подставим значение (19) в формулу (14) для $\varphi_П$.

$$\varphi_П = \varphi_{кр} - \delta \frac{\varphi_{кр} khL}{db} \quad (21).$$

Для переднего правого колеса

$$\varphi_{ПП} = \varphi_П + \delta = \varphi_{кр} - \delta \frac{\varphi_{кр} khL}{db} + \delta = \varphi_{кр} + \delta\left(1 - \frac{\varphi_{кр} khL}{db}\right) \quad (22).$$

Из формулы (21) делаем вывод, что при

$$\varphi_{кр} khL < db \quad (23)$$

значение $\varphi_{ПП}$ будет больше $\varphi_{кр}$, т е первым сорвется переднее правое колесо, после чего процесс станет необратимым. Для нахождения критической скорости, запишем условие достижения критического угла увода передним правым колесом.

$$\varphi_{кр} = \frac{v^2}{gkR} + \delta\left(1 - \frac{v^2 hL}{Rdgb}\right) \quad (24).$$

Выражая $v$, получим

$$v'_{\max} = \sqrt{\frac{kRg(\varphi_{кр} - \delta)}{1 - \delta \frac{hLk}{db}}} \quad (25).$$

*Заметим, что если $\varphi_{кр} khL < db$, то и $\delta$ $khL < db$.*

Таким образом, максимальная скорость определяется либо срывом задних колес, либо срывом переднего правого колеса в зависимости от соотношения между величинами (23).