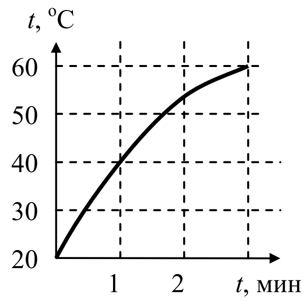
Условия задач. Теоретический тур.

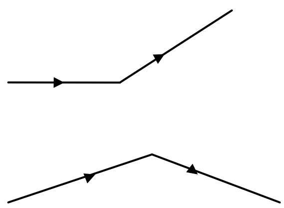
1. Стоя на льду, человек пытается сдвинуть тяжелые сани за привязанную к ним веревку. Масса саней 100 кг, человека 60 кг. Коэффициент трения саней о лед 0,20, человека – 0,30. Под каким углом к горизонту нужно тянуть за веревку?

2. Свинцовая проволочка диаметром d = 0,30 мм плавится при пропускании через нее тока i = 1,8 А, а проволочка диаметром D = 0,60 мм – при токе I = 5,0 А. При каком токе разорвет цепь предохранитель, составленный из двух свинцовых проволочек указанных диаметров, соединенных параллельно? А из двадцати тонких и одной толстой, соединенных параллельно? Длины проволочек считать одинаковыми.



3. В стакан с водой опустили кипятильник, и вода начала понемногу нагреваться. График зависимости температуры воды от времени приведен на рисунке. По истечении 3,0 минут кипятильник выключают, и вода начинает остывать. Через какое время она остынет до 50 градусов? А до 40 градусов?

4. К гладкой вертикальной стене приставлена лестница массой m, образуя с ней угол α. Какой должен быть коэффициент трения между полом и лестницей, чтобы по ней мог взобраться человек массой M?



5. На рисунке представлен ход двух лучей через тонкую линзу. Найти построением положение ее главных фокусов.

Решения задач.

Решение 1. Если попытаться тянуть сани горизонтально, то у нас ничего не получится: сила трения, удерживающая сани на льду

$$F_1 = \mu_1 Mg = 196 \text{ Н}$$

слишком велика для того, чтобы человек мог их сдвинуть

$$F_2 = \mu_2 Mg = 176 \text{ Н}$$

– он начнет проскальзывать раньше.

Однако если тянуть нить не горизонтально, а под некоторым углом α к горизонту, то выполнение условий задачи возможно, т.к. при этом уменьшается вес саней и увеличивается вес человека. Таким образом:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 N_1 = \mu_1\left(Mg - T\sin\alpha\right) = T\cos\alpha \\ \mu_2 N_2 = \mu_2\left(Mg - T\sin\alpha\right) = T\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$ – сила натяжения веревки, μ_1 и μ_2 N_1 и N_2 – соответственно коэффициенты трения и силы реакции, относящиеся к саням и человеку.

Из (1) следует:

$$tg\alpha = \frac{\dfrac{\mu_1 M}{\mu_2 M} - 1}{\mu_1 + \mu_1 \dfrac{M}{m}} = \frac{\mu_1 M - \mu_2 m}{\mu_1 \mu_2 \left(M + m\right)} = 0,21. \quad (2)$$

Таким образом, человек должен тянуть сани под углом большим чем $\alpha = \mathrm{arctg}\left(0,21\right) = 12^{\circ}$ к горизонту.

Из (2) видно, что при $\mu_2 m > \mu_1 M$, угол становится отрицательным $\left(\mathrm{tg}\alpha < 0\right)$, в этом случае тянуть сани можно горизонтально. Заметим, что сдвинуть сани возможно при любом малом $\mu_2 \neq 0$, но для этого важно, чтобы руки были сильными настолько, чтобы обеспечить необходимое значение T, которое мы, за отсутствием надобности не вычисляли. (Верхняя оценка для $T = mg$, когда сани станут «невесомыми» для льда; в этом случае нить практически вертикальна.)

Решение 2. Для правильного решения задачи необходимо учитывать распределение токов между проволочками – в какой именно из них раньше будет достигнуть предельное значение тока.

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{d^2}{D^2}. \quad (1)$$

Из (1) следует, что при токе через R_2равном 5 А (предельном), ток через R_1 равен 1,25 А. Поэтому в первом варианте сборки предохранителя первой расплавится толстая проволочка (D = 0,6 мм). В этот момент ток в цепи будет

$$I = 5\,\text{А} + 1,25\,\text{А} = 6,25\ \text{А}$$

– иными словами, после разрыва контакта в цепи R_2 весь этот ток немедленно «сожжет» и тонкую проволочку, т.е. предохранитель выполнит свою функцию и полностью разомкнет цепь.

Во втором случае (соотношение (1) остается в силе) опять же первой расплавится толстая проволочка (R_2) при токе 5А. При этом полный ток в цепи:

$$I = I_2 + 1{,}25 \cdot 20 = 30 \text{ А}.$$

После равнораспределения по тонким проволочкам:

$$I_1^{/} = \frac{30}{20} \text{ А} = 1{,}5 \text{ А}. \quad (2)$$

Как видим из (2) при таком токе тонкие проволочки еще уцелеют. Перегорят они при большом токе, а именно:

$$I_1^{//} = 1{,}8 \text{ А} \cdot 20 = 36 \text{ А}.$$

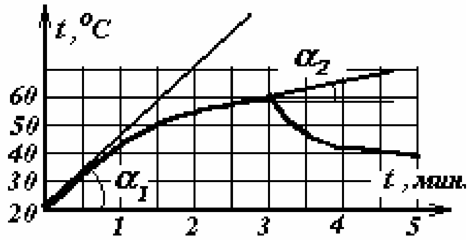
Таким образом, данные составные предохранители рассчитаны на токи 6,25 А и 36 А и работают по принципу: где «толсто», там и перегорает.

Решение 3. Прежде всего отметим, что начальный участок графика – почти прямолинейный, а это означает, что потери тепла тут малы. Это дает нам возможность оценить из графика мощность потерь тепла (т.е. количество отводимой по всей поверхности системы теплоты в единицу времени). Для этого сравним наклоны касательных в разных точках графика.

Например, при 60 $^{\circ}$C тангенс угла наклона касательной уменьшается почти в 8 раз (т.е. 7/8 от поступающей энергии уходит наружу):

$$\operatorname{tg}\alpha_2 \approx \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{8}.$$

Проводя аналогичные измерения при t = 50 $^{\circ}$C, найдем, что потери составляют примерно половину поступающей энергии.



Примерный график, построенный малыми участками прямых по вышеприведенным оценкам, представлен на рисунке. Из него находим, что время остывания до 50 $^{\circ}$C – около 1/3 минуты, до 40 $^{\circ}$C – чуть больше минуты.

При дальнейшем нагревании воды график, приведенный в условии задачи мог выйти на горизонтальный участок либо без кипения (мощность потерь сравнялась с малой мощностью нагревателя), либо с кипением (мощность потерь при температуре кипения меньше мощности нагревателя).

Решение 4. Пусть человек находится на расстоянии x от верхнего края лестницы. Тогда условия равновесия лестницы имеет вид

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha + Mgx\sin\alpha - Nl\sin\alpha + F_{mp}l\cos\alpha = 0. \quad (1)$$

$$Mg + mg - N = 0, \quad (2)$$

где (1) – суммарный момент сил, действующих на лестницу относительно точки A, (2) – сумма проекций сил на вертикальную ось. Сила трения покоя не превышает силы трения скольжения, поэтому

$$F_{mp} < \mu N. \quad (3)$$

Выражая из (1), (2) величины N и F_{mp} подставляя их в (3), получим необходимое условие равновесия:

$$\mu \geq \frac{M + \frac{m}{2} - M\frac{x}{2}}{M+m} tg\alpha.$$

Как следует из этого неравенства сила трения достигает максимального значения, когда человек поднимается на вершину лестницы, т.е. при $x = 0$. Поэтому окончательный ответ задачи

$$\mu \geq \frac{M + \frac{m}{2}}{M+m} tg\alpha.$$

Отметим, что при $M >> m$ ответ упрощается и приобретает знакомый вид

$$\mu \geq tg\alpha.$$

Решение 5. Опираясь на принцип обратимости световых лучей, можем изменить направление хода луча на противоположное – при этом его положение не изменится. В нашем случае это удобно сделать с нижним лучом – тогда можем продлить сходящиеся лучи до пересечения в точках A и B. После этого будем считать, что точка A – мнимый источник, а точка B – его мнимое изображение. Местоположение линзы найдем, соединяя точки излома лучей C и D . Пересечение отрезков CD и AB даст нам положение оптического центра O рассеивающей линзы. С помощью луча $1^/$ (параллельного лучу 1) найдем точку побочного фокуса E и положение главного фокуса линзы F. Таким образом, данная линза является рассеивающей (отрицательной), расположена на отрезке CD с главной оптической осью OF (F – главный фокус линзы).