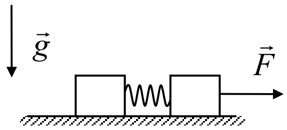
Республиканская олимпиада. 9 класс. Гродно 1991 г

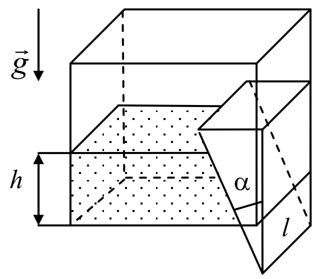
Условия задач. Теоретический тур.

1. Максимальная дальность полета камня, выпущенного из неподвижной катапульты, равна S = 22,5 м. Найдите максимально возможную дальность полета камня, выпущенного из этой же катапульты, установленной на платформе, которая движется горизонтально с постоянной скоростью v = 15,0 м/с. Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения считать g = 10,0 м/с^2.

2. Два одинаковых груза массой M каждый, соединенные пружиной, лежат на шероховатой горизонтальной плоскости в поле тяжести земли. Какую минимальную горизонтальную силу необходимо приложить к правому грузу, чтобы пришел в движение левый груз? Коэффициент трения грузов о плоскость μ. В начальном состоянии пружина не деформирована.



3. В углу аквариума находится клин массой M с углом при вершине α, который может скользить вдоль вертикальной стенки. Какой максимальный уровень воды установится в аквариуме, если коэффициент трения клина о вертикальную стенку μ? Ширина клина l, плотность жидкости ρ.



4. В теплоизолированный цилиндрический сосуд поместили кусок льда при нулевой температуре и прочно прикрепили его ко дну. Затем залили этот лед таким же по массе количеством воды. Вода полностью покрыла лед и достигла уровня H = 20 см. Определите, какова была температура этой воды, если после установления теплового равновесия уровень ее опустился на b = 0,40 см. Плотность воды $\rho_o = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3, льда $\rho_1 = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды c_o = 4,2 кДж/(кг·К), удельная теплоемкость льда в два раза меньше. Удельная теплота плавления льда $L = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

5. Одна сторона тонкой металлической пластинки освещена Солнцем. При температуре воздуха T_o освещенная сторона имеет температуру T_1, противоположная – T_2. Какими будут значения температур, если взять пластину двойной толщины?

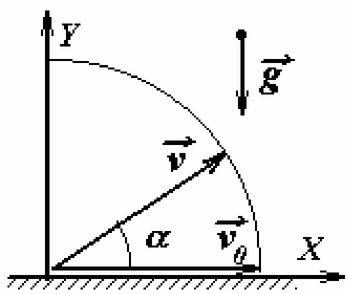
Решения задач.

Решение 1. Хорошо известно, что максимальная дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, достигается при угле вылета равном 45° и определяется формулой

$$S = \frac{v_o^2}{g}. \quad (1)$$

Из этой формулы можно найти скорость, которую катапульта сообщает камню

$$v_o = \sqrt{gS} = 15 \text{ м/с}.$$



Рассмотрим теперь полет камня, выпущенного из движущейся катапульты. Введем систему координат, оси которой: X – направлена горизонтально, а Y – вертикально. Начало координат совместим с положением катапульты в момент вылета камня.

Для вычисления вектора скорости камня необходимо учесть горизонтальную скорость движения катапульты $v = v_o$ Допустим, что катапульта выбрасывает камень под углом α к горизонту. Тогда компоненты начальной скорости камня в нашей системе координат могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} v_{xo} &= v_o + v_o \cos\alpha \\ v_{yo} &= v_o \sin\alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

Закон движения камня имеет вид

$$\begin{aligned} x &= v_{xo} t = v_o \left(1 + \cos\alpha\right) t \\ y &= v_{yo} t - \frac{gt^2}{2} = v_o t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Из второго уравнения системы (3) найдем время полета, положив $y = 0$,

$$\tau = \frac{2v_o \sin\alpha}{g}. \quad (4)$$

Подставив это выражение в первое уравнение системы (3), получим дальность полета камня

$$S_1 = v_o \left(1 + \cos\alpha\right) \frac{2\upsilon_o \sin\alpha}{g}. \quad (5)$$

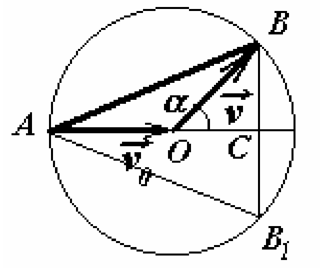
Отвлечемся немного от решения данной конкретной задачи и порассуждаем о полученном выражении. Во-первых, если катапульта неподвижна ($v = 0$), то формула (5) переходит в известное выражение для дальности полета тела, брошенного с начальной скоростью под углом α к горизонту

$$S' = \frac{2v_o^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}. \quad (6)$$

Во-вторых, из (5) совсем не следует, что S_1 будет максимально при $\alpha = 45^o$ (это справедливо для (6), когда $v = 0$).

Предлагая эту задачу на республиканскую олимпиаду, авторы были убеждены, что девять десятых участников получат формулу (5) и затем подставят в нее значение $\alpha = 45^o$. Однако, к нашему сожалению, мы ошиблись: ни один из олимпийцев не усомнился в том, что максимальная дальность полета всегда (!) достигается при угле вылета, равном 45^o. Этот широко известный факт имеет ограниченные рамки применимости: он справедлив только, если: а) не учитывать сопротивление воздуха; б) точка вылета и точка падения находятся на одном уровне; в) метательный снаряд неподвижен.

Вернемся к решению задачи. Итак, нам необходимо найти значение угла α, при котором S_1 определяемое формулой (5), максимально. Можно, конечно, найти экстремум функции, используя аппарат дифференциального исчисления: найти производную, положить ее равной нулю и, решив полученное уравнение, найти искомое значение α. Однако, учитывая, что задача была предложена ученикам 9-х классов, мы дадим ее геометрическое решение. Воспользуемся тем обстоятельством, что $v = v_o = 15$ м/с.



Расположим векторы $\vec{v}$ и $\vec{v}_o$ как показано на рис. Так как их длины равны, то вокруг них можно описать окружность с центром в точке O. Тогда длина отрезка AC равна $v_o + v_o\cos\alpha$ (это есть v_{xo}), а длина отрезка BC равна $v_o \sin\alpha$ (это v_{yo}). Их произведение равно удвоенной площади треугольника ABC, или площади треугольника ABB_1. Обратите внимание, что именно произведение $v_{xo}v_{yo}$ входит в выражение для дальности полета (5). Иными словами, дальность полета равна произведению площади ΔABB_1 на постоянный множитель $2/g$. А теперь зададимся вопросом: какой из вписанных в данную окружность треугольников имеет максимальную площадь? Естественно, правильный! Поэтому искомое значение угла $\alpha = 60^o$.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ есть вектор полной начальной скорости камня, он направлен под углом 30^o к горизонту (опять же отнюдь не 45^o).

Таким образом, окончательное решение задачи следует из формулы (5), в которую следует подставить $\alpha = 60^o$.

$$S_1 = \frac{2v_o^2}{g}\left(1 + \cos 60^o\right)\sin 60^o = S\frac{3\sqrt{3}}{2} = 58{,}5 \text{ м}.$$

Решение 2. Для того, чтобы сдвинуть тело 2 с места, необходимо приложить к нему горизонтально силу, которая превышает максимальную силу трения покоя, которая в данном случае равна

$$F_{тр2} = \mu mg. \quad (1)$$

В качестве силы, которая сдвигает это тело, выступает сила упругости пружин, модуль которой, согласно закону Гука, равен

$$F_{упр} = k\Delta x, \quad (2)$$

где k – жесткость пружины, Δx – ее удлинение.

Таким образом, необходимо удлинить пружину (т. е. сдвинуть тело 1) на величину

$$\Delta x = \frac{\mu mg}{k}. \quad (3)$$

Если мы приложим к телу 1 постоянную силу F таким образом его движение не будет равноускоренным, так как на него действует, помимо постоянной силы трения $F_{тр} = \mu mg$ сила упругости $F_{упр} = k\Delta x$, которая не является постоянной. Качественно движение тела 1, при неподвижном теле 2, можно описать следующим образом. Если сила F по модулю превышает силу трения $F_{тр1}$ то тело начнет двигаться с положительным ускорением, при этом сила упругости начнет возрастать, в некоторой точке $F_{упр}$ превысит разность $F - F_{тр1}$ и ускорение изменит свой знак. Тело 1 еще некоторое время будет двигаться в положительном направлении и затем остановиться. Максимальная деформация пружины будет в момент остановки тела. Эту максимальную деформацию Δx_1 можно найти, воспользовавшись энергетическими соображениями: работа постоянной силы F числено равна изменению энергии пружины плюс работа силы трения. Кинетическая энергия тела в начальный и конечный моменты движения равна нулю.

$$F\Delta x_1 = \mu mg\Delta x_1 + \frac{k\left(\Delta x_1\right)^2}{2} \quad (4)$$

или

$$F = \mu mg + \frac{k\Delta x_1}{2} \quad (5)$$

Очевидно, что для ответа на поставленный в задаче вопрос следует положить в (5) $\Delta x_1 = \Delta x$ определяемое (3). Окончательно получим

$$F = \mu mg + \frac{\mu mg}{2} = \frac{3}{2}\mu mg. \quad (6)$$

Обратите внимание на два обстоятельства:

1. Искомая сила равна сумме силы трения, действующей на тело 1, и половине (!) силы трения, действующей на тело 2;

2. Ответ не зависит от величины жесткости пружины. Подумайте, как объяснить эти обстоятельства в том случае, когда жесткость пружины очень велика (скажем, вместо пружины металлический стержень).

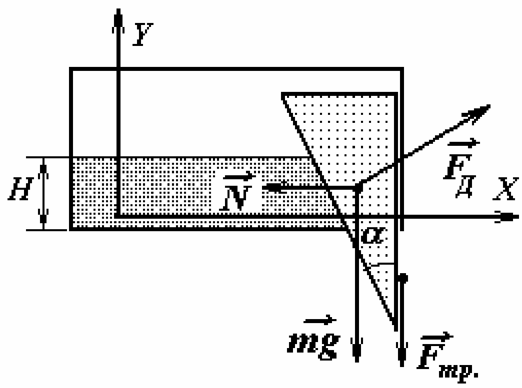
Не объясняет ли данная задача старую бурлацкую песню «поддернем, поддернем, да ухнем!»?

<u>Решение 3.</u> Пусть в рассматриваемый момент уровень воды в аквариуме равен H. Тогда среднее давление жидкости на клин

$$<P> = \frac{1}{2}\rho g H,$$

соответственно средняя сила давления

$$F_Д = \frac{1}{2}\rho g h l \frac{h}{\cos\alpha}, \quad (1)$$



где l — ширина клина. Сила $F_Д$ стремится приподнять клин, а силы тяжести и трения препятствуют этому. Понятно, что если при некотором значении H клин все же будет приподнят, таким образом вода начнется выливаться из аквариума и клин опуститься.

Таким «автоколебательным» режимом и будет установлен возможный максимальный уровень жидкости в аквариуме.

Условие равновесия клина

$$m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_Б + \vec{N} = \vec{0}. \quad (2)$$

Атмосферным давлением, обратите внимание, мы, записывая (2), пренебрегли. Подумайте самостоятельно, почему оно не вошло в значение $<P>$.

В проекциях на оси OX и OY

$$F_Б\cos\alpha = N, \quad (3) \quad F_Д\sin\alpha = mg + F_{тр}. \quad (4)$$

В предельном случае (клин начинает подниматься)

$$F_{тр} = \mu N = \mu F_Д\cos\alpha.$$

И из (3) – (4) следует:

$$F_Д = \frac{mg}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} = \frac{1}{2}\rho g \frac{l}{\cos\alpha} H^2,$$

откуда и получаем окончательный ответ

$$H = \sqrt{\frac{2mg}{\rho g l(\mathrm{tg}\alpha - \mu)}}. \quad (5)$$

Выясним, всегда ли справедлив ответ в форме (5). Подкоренное выражение не может быть отрицательным, поэтому сразу отмечаем, что (5) имеет смысл при $\mu < \mathrm{tg}\alpha$ Физически это означает, что клин может быть поднят только не при очень сильном трении. А как быть при $\mu \geq \mathrm{tg}\alpha$? Понятно, что в этом случае условие (4) будет выполнено при значении силы трения $F_{тр}$ меньше предельного (т. е. трением покоя). И воды, следовательно, можно наливать сколько угодно в аквариум – ее максимальный уровень уже будет определяться иными причинами (например, высотой стенок).

Решение 4. Для решения важно заметить, что не весь лед растаял. Таким образом, установившееся температура в системе $t_k = 0$ ^oC Из уравнения теплового баланса:

$$cM\left(t_B - t_K\right) = \lambda m, \quad (1)$$

где m – масса растаявшего льда, M – масса (начальная) воды. Учет изменения объема

$$\frac{m}{\rho_o} - \frac{m}{\rho_B} = bS; \ \frac{M}{\rho_o} + \frac{M}{\rho_B} = HS. \quad (2)$$

Из (1), (2) получаем

$$t_B = \frac{\lambda b}{cH}\frac{\rho_B - \rho_o}{\rho_B + \rho_o} = 37{,}7\ ^oC\,.$$

Решение 5. В этой задаче необходимо использовать разумные предложения (которые, впрочем, формулируется в форме строгих физических законов).

Пусть освещенная сторона пластинки поглощает в единицу времени энергию q_o В состоянии теплового равновесия эта энергия излучается в окружающую среду как с освещенной (q_1), так и с затемненной (q_2) стороны. Причем можно считать, что количество отданной теплоты пропорционально разности температур поверхности и окружающего воздуха.

Запишем условия теплового баланса

$$q_o = q_1 + q_2 = a\left(T_1 - T_o\right) + a\left(T_2 - T_o\right), \quad (1)$$

где a – некоторая постоянная в рамках нашей задачи величина. Количество теплоты q_2 излучаемое затемненной стороной, переноситься внутри пластины. Этот поток теплоты пропорционален скорости изменения температуры с расстоянием

$$q_2 = k\frac{T_1 - T_2}{d} = a\left(T_2 - T_o\right), \quad (2)$$

где d – толщина пластины, k – некоторый постоянный коэффициент (он называется теплопроводностью), зависящий от свойств материала, из которого изготовлена пластина. Аналогичные соотношения можно записать для пластины толщиной $2d$

$$q_o = a\left(T_1^{/} - T_o\right) + a\left(T_2^{/} - T_o\right), \quad (3)$$

$$q_2^{/} = k\frac{T_1^{/} - T_2^{/}}{2d} = a\left(T_2^{/} - T_o\right), \quad (4)$$

где $T_2^{/}$ и $T_1^{/}$ – температуры освещенной и неосвещенной сторон пластины вдвое большей толщины.

Совместное решение системы уравнений (1) – (4) приводит к результату

$$T_1^{/} = \frac{\left(T_1 + T_2 - 2T_o\right)\left(2T_1 - T_2 - 2T_o\right)}{2\left(T_1 - T_o\right)},$$

$$T_2^{/} = \frac{\left(T_2 - T_o\right)\left(T_1 + T_2 - 2T_o\right)}{2\left(T_1 - T_o\right)}.$$