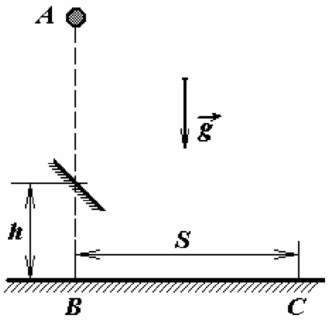
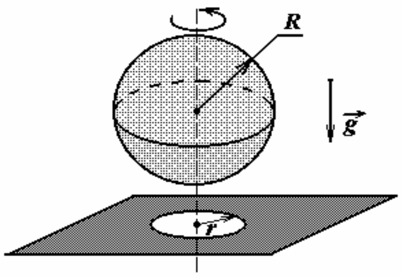
Условия задач. Теоретический тур.

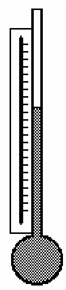


1. Небольшой шарик падает из точки A на массивную плиту, закрепленную на высоте $h = 1{,}0 м$ от поверхности земли и ориентированную под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. После упругого отражения от плиты шарик падает на поверхность земли в точке C на расстоянии $S = 4{,}0 м$ от вертикальной прямой AB. Найдите время движения шарика до удара о землю.

На какой высоте необходимо расположить плиту (не меняя ее ориентации), чтобы расстояние S было максимально при неизменном начальном положении шарика в точке A? Чему оно равно? Сопротивлением воздуха пренебречь.

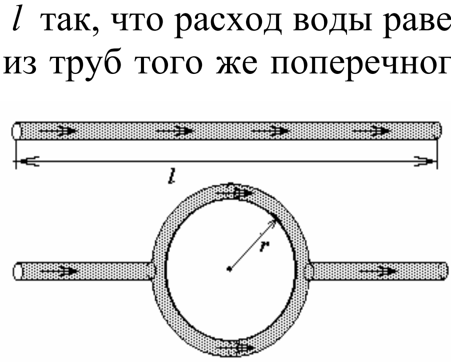


2. Вращающийся вокруг вертикальной оси однородный шар радиуса $R = 10 см$ аккуратно положили в круглое отверстие радиуса $r_1 = 8{,}0 см$, проделанное в тонкой горизонтальной плите. Вращение шарика прекратилось через время $t_1 = 12 с$. Через какое время остановится этот же шар, если его раскрутить до той же начальной скорости и положить в отверстие радиуса $r_2 = 6{,}0 см$?



3. Молодой талантливый физик Федя решил самостоятельно изготовить термометр. Тонкую стеклянную трубку вставил в небольшой сосуд, залил в него подкрашенную жидкость, рассчитал шкалу, изготовил ее и прикрепил к трубке. Проводя испытания этого термометра Федя с удивлением обнаружил, что погруженный в тающий лед термометр показывает $t_0 = 5°$, а помещенный в кипящую воду дает показания $t_1 = 95°$. Какова температура воздуха в комнате, если показание Фединого термометра $t = 25°$? Атмосферное давление нормальное.

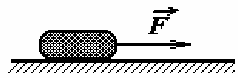
4. Насос прокачивает воду по прямой трубе длиной l так, что расход воды равен V_0. В трубу врезали кольцо радиуса r, изготовленное из труб того же поперечного сечения, как показано на рисунке. Считая, что разность давлений на концах трубы осталась неизменной, найдите расход воды в этом случае.

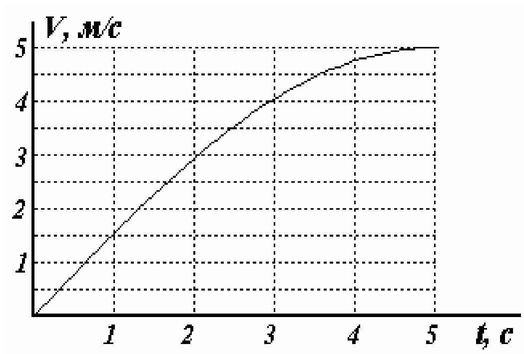


<u>Примечания.</u> 1. Расходом называется объем жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени.

2. Средняя скорость движения жидкости по трубе определяется формулой $v_{ср.} = \lambda \dfrac{S}{l} \Delta P$, где ΔP - разность давлений на концах трубы, l - длина трубы, S - площадь ее поперечного сечения, λ - постоянный коэффициент, зависящий только от свойств жидкости.

5. Небольшой брусок массой $m = 1,0кг$ движется по гладкой горизонтальной поверхности под действием горизонтально направленной силы $\vec{F}$. На рисунке представлен график зависимости модуля его скорости от времени. Постройте график зависимости модуля силы $\vec{F}$ от смещения бруска. Какая работа совершена силой F за 5,0с движения бруска?





Решение задач.

Решение 1. Так как плита наклонена под углом 45^{o} к горизонту, то после удара скорость шарика $\vec{V}_1$ будет направлена горизонтально. Поэтому, движение шарика после удара описывается уравнениями

$$\begin{cases} S = V_1 t_2 \\ h = \dfrac{g t_2^2}{2} \end{cases}, (1)$$

где t_2 – время движения от удара о плиту до падения на землю. Из системы уравнений (1) находим

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}\ ;\ V_1 = S\sqrt{\frac{g}{2h}}\ . (2)$$

Зная скорость шарика перед ударом о плиту, найдем время его движения от начальной точки A до удара

$$t_1 = \frac{V_1}{g} = \frac{S}{\sqrt{2gh}}\ . (3)$$

Полное время движения шарика рассчитаем по формуле

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S}{\sqrt{2gh}} + \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 1{,}35 \text{ с. } (4)$$

Используя выражение (3), найдем высоту H точки A над уровнем земли

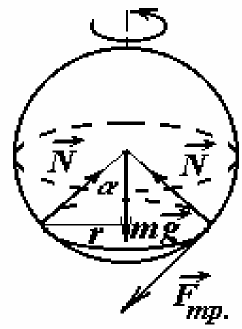
$$H = h + \frac{g t_1^2}{2} = h + \frac{S^2}{4h} = 5{,}0 \text{ м. } (5)$$

Найдем высоту h_o, на которой необходимо расположить плиту, чтобы дальность полета S была максимальна. Пройдя в свободном падении путь $(H - h_o)$, шарик наберет скорость $V_1 = \sqrt{2g(H - h_o)}$. Как следует из формул (2), после отражения он пролетит до падения на землю расстояние

$$S = V_1\sqrt{\frac{2h_o}{g}} = 2\sqrt{h_o(H - h_o)}\ . (6)$$

Подкоренное выражение представляет собой квадратичную функцию от h_o, которая в данном случае достигает максимума при $h_o = \dfrac{H}{2} = 2{,}5$, при этом $S_{\max} = H = 5{,}0$ м.

<u>Решение 2.</u> При вращении кинетическая энергия шара вследствие работы сил трения перейдет в тепловую. Работа сил трения может быть рассчитана по формуле



$$A = F < V > t. \quad (1),$$

где F – сумма модулей сил трения, действующих на отдельные участки линии соприкосновения шара и плиты; $< V >= \dfrac{\omega_o r}{2}$ – средняя скорость движения точек соприкосновения, ω_o – начальная угловая скорость вращения (так как все силы действующие на шарик постоянны, то его движение будет равнозамедленным, следовательно средняя скорость до остановки равна половине начальной); t – время движения. Величину F найдем по закону Кулона-Амонтона $F = \mu N, \quad (2)$,

где N – суммарная сила нормальной реакции плиту, действующей на шарик. Так как центр масс шарика покоится, сила тяжести уравновешивается вертикальной составляющей сил реакции $mg = N\cos\alpha = N\dfrac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}, \quad (3)$,

откуда следует $N = mg\dfrac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (4)$.

Подставив выражения (2) – (4) в формулу (1), получим

$$A = \mu mg\frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot \frac{\omega_o r}{2}t. \quad (5).$$

Начальные скорости вращения шарика в обоих случаях равны, поэтому равны и его кинетические энергии, следовательно, равны и работы сил трения. Таким образом, из уравнения (5) следует соотношение

$$\frac{r_1 t_1}{\sqrt{R^2 - r_1^2}} = \frac{r_2 t_2}{\sqrt{R^2 - r_2^2}}. \quad (6)$$

из которого находим окончательный ответ задачи $t_2 = \dfrac{r_1\sqrt{R^2 - r_2^2}}{r_2\sqrt{R^2 - r_1^2}}t_1 \approx 21$ с.

<u>Решение 3.</u> Так как самодельный термометр работает на принципе теплового расширения жидкости, то его шкала в заданном диапазоне температур линейна. Следовательно, истинная температура, которую мы обозначим τ, связана с показанием термометра t линейным соотношением $\tau = a + bt, \quad (1)$,

где a, b – постоянные величины, которые легко найти из двух известных температур плавления льда и кипения воды с соответствующих показаний термометра:

$$\begin{cases} \tau_o = a + bt_o \\ \tau_1 = a + bt_1 \end{cases}, \quad (2)$$

здесь $\tau_o = 0\ ^oC$ – температура плавления льда, $\tau_1 = 100\ ^oC$ – температура кипения воды. Из системы уравнений (2) находим параметры формулы (1):

$$b = \frac{\tau_1 - \tau_o}{t_1 - t_o} \approx 1{,}11;\ a = \frac{\tau_o t_1 - \tau_1 t_o}{t_1 - t_o} \approx -5{,}56.$$

Следовательно, истинная температура воздуха в комнате $\tau = a + bt \approx 22\ ^oC$.

Решение 4. Наиболее простой способ решения данной задачи – воспользоваться аналогией между законом движения жидкости по трубе и законами постоянного тока. Действительно, если заменить среднюю скорость движения жидкости (и пропорциональный ей расход) на силу тока, разность давлений на электрическое напряжение, а величину $\frac{l}{\lambda S}$ на электрическое сопротивление, то из уравнения для расхода жидкости получим закон Ома для участка цепи $I = \frac{U}{R}$.Сопротивление цепи, аналогичной прямой трубе определяется формулой $R_o = \frac{l}{\lambda S}$. (1)

А сопротивление цепи, аналогичной системе труб с врезанным кольцом, рассчитаем с использованием законов последовательного и параллельного соединения проводников: $R_1 = \dfrac{l - 2r + \frac{\pi r}{2}}{\lambda S}$. (2).

Так как при постоянном напряжении сила тока обратно пропорциональна сопротивлению участка, то и для расхода жидкости будет выполняться аналогичное соотношение $\frac{V_1}{V_o} = \frac{R_o}{R_1}$. (3).

Следовательно, $V_1 = V_o \dfrac{l}{l - 2r + \frac{\pi r}{2}}$.

Решение 5. По графику зависимости скорости от времени можно приблизительно найти изменение координаты тела Δx за небольшой промежуток времени Δt по формуле $\Delta x = \frac{v_1 + v_o}{2}\Delta t$, где v_1, v_0 – скорости тела в конце и начале рассматриваемого промежутка времени. Среднее значение ускорения на этом же временном интервале можно приблизительно рассчитать по формуле $\Delta x = \frac{v_1 - v_o}{\Delta t}$. Заметим, что координату тела легче рассчитывать в конце рассматриваемого интервала, а ускорение в его середине, кроме того, точность таких вычислений не слишком высока, поэтому лучше сначала построить графики зависимостей координаты и силы, действующей на тело ($F = ma$) от времени, а затем уже требуемую зависимость силы от координаты. Результаты таких построений показаны на рисунках.

Работу, совершенную силой, проще и точнее рассчитать, как изменение кинетической энергии тела $A = \frac{mv^2}{2} \approx 12{,}5$ Дж.