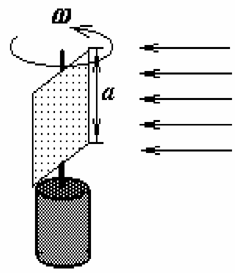
Республиканская олимпиада. 9 класс. Брест 2000 г.

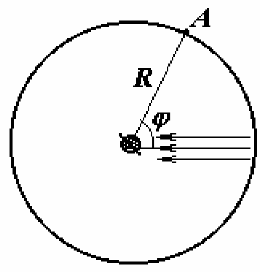
Условия задач. Теоретический тур.

1. Автобус проехал первую треть пути со скоростью 50 км/ч, а вторую – со скоростью 60 км/ч. С какой скоростью ему нужно проехать оставшуюся часть пути, чтобы средняя скорость движения автобуса на всем маршруте была: а) $\langle v\rangle$ = 70 км/ч; б) $\langle v\rangle$ = 90 км/ч?

2. Шар радиусом R плавает в жидкости, практически полностью погрузившись в нее. Найдите силу давления жидкости на нижнюю половину поверхности шара. Плотность жидкости ρ. Объем шара рассчитывается по формуле $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.



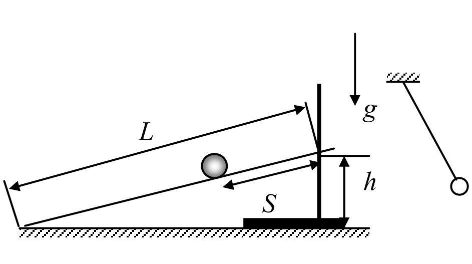
3. Плоское квадратное зеркальце со стороной а симметрично закреплено на валу электродвигателя и вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Эта «вертушка» установлена в центре круглой комнаты радиусом R ($R \gg a$) и полностью освещена параллельным пучком света. На стене комнаты на пути светового зайчика от зеркальца в точке A установлен точечный фотоприемник. Направление на точку A образует угол φ с направлением падающего света. Какова длительность светового импульса, регистрируемого фотоприемником?



4. Имеется теплоизолированный толстостенный цилиндрический стакан, толщина стен которого составляет 20 % от его внешнего радиуса. Если стакан нагреть до t_1 = 400 ^{o}C и полностью заполнить льдом, взятым при температуре плавления t_o = 0 ^{o}C, то, в конечном счете, весь лед растает. Во сколько раз нужно изменить толщину стенок стакана (при неизменном внешнем радиусе), чтобы, заполнив его полностью льдом при тех же начальных температурах льда и стакана, мы смогли бы закипятить воду? Испарением и тепловыми потерями пренебречь. Удельная теплоемкость воды c = 4,19 кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}36\cdot10^5$ Дж/кг, температура кипения воды t = 100 ^{o}C.

5. Одним из основоположников современной физики по праву считается итальянский ученый Галилео Галилей. В начале XVII века он экспериментально исследовал движение различных тел под действием притяжения к Земле. Ему удалось доказать, что такое движение является равноускоренным и не зависящим от массы тела (если пренебречь силами сопротивления). В частности, Галилей подробно исследовал качение шаров (в качестве которых использовал пушечные ядра) по наклонной плоскости.

Воспроизведем результаты опытов Галилея. В качестве наклонной плоскости используется желоб длиной L = 5,0 м (конечно, во времена Галилея в Италии употреблялись другие единицы), один из концов которого приподнят на высоту h.



Для того чтобы отмерять равные промежутки времени, Галилей использовал маятник – груз подвешенный на нити.

В таблице 1 приведены значения пути S, пройденного шаром, за время, равное целому числу n колебаний маятника, при разных значениях высоты h (проскальзывание отсутствует)

h = 20 см	n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	S, м	0,19	0,39	0,77	1,18	1,59	2,29	2,92	3,43	4,37
h = 20 см	n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	S, м	0,27	0,64	1,17	1,79	2,47	3,51	4,31	–	–
h = 20 см	n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	S, м	0,37	0,90	1,54	2,31	3,01	4,60	–	–	–

На основании приведенных данных

1. Покажите, что движение ядра по желобу действительно является равноускоренным.

2. Найдите, как зависит ускорение ядра от высоты h. Объясните эту зависимость.

3. Вычислите путь, который пройдет ядро за пять колебаний маятника при высоте h = 50 см?

Решения задач.

<u>Решение 1.</u> По определению средней скорости $<v>= S/t,\ (1)$ где S – длина всего маршрута, t – время его прохождения. Обозначим скорость автобуса на последней трети пути через v_3. Тогда

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{S/3}{v_1} + \frac{S/3}{v_2} + \frac{S/3}{v_3}. \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1), получаем

$$<v>= \frac{S}{\dfrac{S/3}{v_1} + \dfrac{S/3}{v_2} + \dfrac{S/3}{v_3}}. \quad (3)$$

Отсюда можно выразить искомую скорость

$$v_3 = \frac{<v> v_1 v_2}{3v_1 v_2 - <v> (v_1 + v_2)}. \quad (4)$$

Подставив в выражение (4) $<v>= 70$ км/ч, получим ответ для первого пункта задачи

$$v_3 = \frac{70 \cdot 50 \cdot 70}{3 \cdot 50 \cdot 70 - 70(50 + 70)} \approx 117 \text{ км/ч}$$

Полученное значение для скорости движения достаточно большое и, конечно же, противоречит правилам дорожного движения, поэтому реальному водителю лучше не гнаться за указанным средним.

Подставляя в формулу (4) $<v>= 90$ км/ч, мы обнаруживаем, что

$$v_3 = \frac{90 \cdot 50 \cdot 70}{3 \cdot 50 \cdot 70 - 90(50 + 70)} = -1050 \text{ км/ч} < 0.$$

Результат явно противоречит здравому смыслу, так как автобус должен двигаться только вперед. Проанализируем выражение (4). Знаменатель обращается в нуль при

$$< v^* >= \frac{3v_1v_2}{v_1+v_2} = 87{,}5 \text{ км/ч}.$$

При этом $v_3 \to \infty$, т. е. это предельное значение средней скорости автобуса на всем маршруте, возможное при данных условиях движения. Даже мчась на последнем участке «со скоростью света», водитель не сможет превысить значение $< v^* >$. Таким образом, мы показали, что скорости движения автобуса на первых участках маршрута ограничивают максимальное значение его средней скорости на всем пути. Поскольку 70 км/ч $> < v^* >=$ 87,5 км/ч

Скорости не может быть достигнуто ни при каких значениях v_3. Этот результат полезно знать водителям лихачам – кратковременный рывки с большой скоростью не помогут достичь высокой средней скорости, если в пути будут хотя бы кратковременные остановки. Лучше двигаться с меньшей скоростью, но без остановок (кстати, при этом не придется обгонять дважды одни и те же машины).

Решение 2. Непосредственно подсчитать силу давления жидкости для школьника задача практически нерешаемая, так как в каждой точке полушария меняется как направление силы давления, так и величина самого давления. Поэтому используем для решения стандартный прием мысленного рассечения шара на две половины: верхнюю и нижнюю. Сила Архимеда, действующая на нижнюю половину, с одной стороны равна по определению

$$F_A = \rho gV = \rho g\frac{2}{3}\pi R^3. \quad (1)$$

С другой стороны, сила Архимеда равна разности сил давления на нижнюю и верхнюю поверхности полушария.

$$F_A = F_\uparrow - F_\downarrow. \quad (2)$$

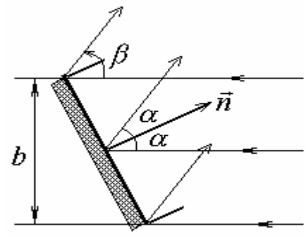
Сила давления $F_\downarrow$ на верхнюю поверхность вычисляется просто

$$F_\downarrow = pS = \rho gR\pi R^2. \quad (3)$$

Поэтому, так же просто с помощью формул (1) – (3) мы найдем и силу давления на нижнюю поверхность

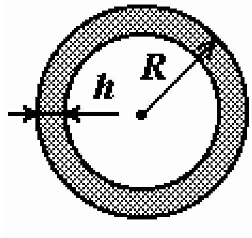
$$F_\uparrow = F_A + F_\downarrow = \frac{2}{3}\pi\rho gR^3 + \pi\rho gR^3 = \frac{5}{3}\pi\rho gR^3.$$

Решение 3. Пусть нормаль к зеркалу $\vec{n}$ образует угол α с направлением падающего света. Тогда отраженный пучок будет распространяться под углом $\beta = 2\alpha$ к падающему световому пучку. Это означает, что если зеркало за время Δt повернется на некоторый угол, то отраженный луч (следовательно, и зайчик) повернется на удвоенный угол, то есть угловая скорость поворота зайчика в два раза больше угловой скорости вращения зеркала $\omega_1 = 2\omega$. Ширину отраженного пучка легко определить из рисунка $b = a\cos\alpha$. Такой же будет и ширина зайчика (пучка) на стенке, где установлен фотоприемник. Учтем, что при



попадании зайчика на фотоприемник $\beta = \varphi$. Тогда время прохождения зайчика по фотоприемнику равно $\tau = \dfrac{b}{v} = \dfrac{a\cos\dfrac{\varphi}{2}}{2\omega R}$.

Этот результат получен в приближении малости размеров зеркала по сравнению с размерами комнаты, что позволяет не учитывать небольшую разбежку в углах ориентации зеркальца, в моменты, когда передний и задний фронт отраженного пучка пересекают фотоприемник.



Решение 4. Пренебрегая теплоемкостью дна и тепловыми потерями, запишем уравнение теплового баланса для системы стакан-лед

$$V_1\rho_1 c_1 t_1 = V_2 \rho\lambda, \ (1)$$

где $V_1 = \pi(R^2 - (R-h_1)^2)H$ – объем стенок стакана толщиной h_1, R и H – его внешний радиус и высота, ρ_1 и c_1 – плотность и удельная теплоемкость вещества, из которого изготовлены стенки стакана, $V_2 = \pi(R-h_1)^2 H$ – объем льда, ρ – его плотность. Во втором случае (таяние льда и нагрев воды до температуры кипения) в стакане со стенками толщиной h_2 уравнение теплового баланса имеет вид

$$\pi(R^2 - (R-h_2)^2)H\rho_1 c_1 (t_1 - t_2) = \pi(R-h_2)^2 H\rho(\lambda + ct_2). \ (2)$$

Разделим почленно уравнение (1) на (2)

$$\frac{R^2-(R-h_1)^2}{R^2-(R-h_2)^2}\cdot\frac{t_1}{t_1-t_2} = \frac{(R-h_1)^2}{(R-h_2)^2}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+ct_2}. \ (3)$$

Теперь учтем, что $h_1 = \eta_1 R = 0{,}2R$ и $h_2 = \eta_2 R$. Подстановка этих соотношений в выражение (3) приводит к квадратному уравнению относительно неизвестной величины η_2

$$\frac{1-(1-\eta_1)^2}{1-(1-\eta_2)^2}\cdot\frac{t_1}{t_1-t_2} = \frac{(1-\eta_1)^2}{(1-\eta_2)^2}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+ct_2}. \ (4)$$

Решать это уравнение в общем виде весьма затруднительно, поэтому подставим в (4) все известные численные данные и придем в итоге к уравнению

$$\eta_2^2 - 2\eta_2 + 0{,}628 = 0,$$

корнями которого являются числа $\eta_2 = 1{,}61;\ 0{,}39$. Выбираем второй корень, поскольку первый явно не подходит (обратите внимание, что он дает такую же по модулю разность в скобках в уравнении (4) как и первый корень). Тогда изменение толщины стенок равно

$$\frac{0{,}39}{0{,}20} = 1{,}95 \approx 2.$$

Увеличить толщину стенок стакана придется примерно в два раза.

Отметим, что мы могли насыпать в стакан колотый лед или рыхлый снег, главное чтобы их плотность в обоих опытах была неизменна.

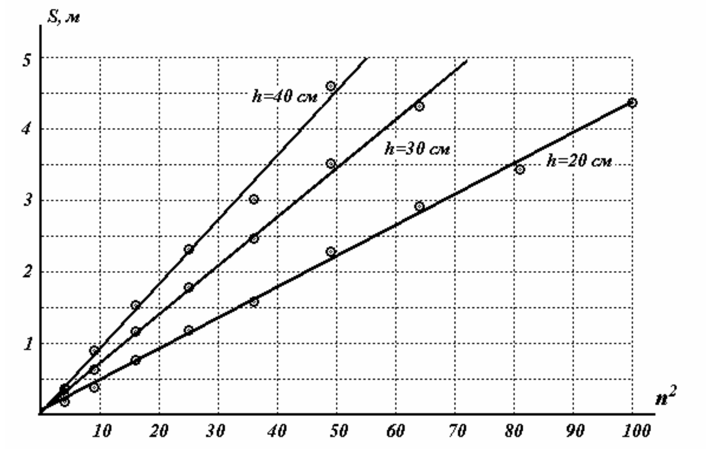
<u>Решение 5.</u> При равноускоренном движении тела с нулевой начальной скоростью пройденный путь зависит от времени по закону

$$S = \frac{at^2}{2}, (1)$$

где a – ускорение тела. Иными словами, пройденный путь пропорционален квадрату времени. Постоянный период колебаний маятника в данном случае может служить единицей измерения времени, поэтому можно переписать формулу (1) в виде

$$S = \frac{An^2}{2}, (2)$$

где A – ускорение тела, измеренное в «метрах на период в квадрате», а n – число периодов.



Построим графики зависимости пройденного пути от квадрата времени (то есть, n^2). Как видно, эти зависимости представляют прямые линии, следовательно эксперимент подтверждает формулу (2), то есть движение действительно является равноускоренным.

2. По наклону графиков определим ускорения шаров при каждом значении высоты h:

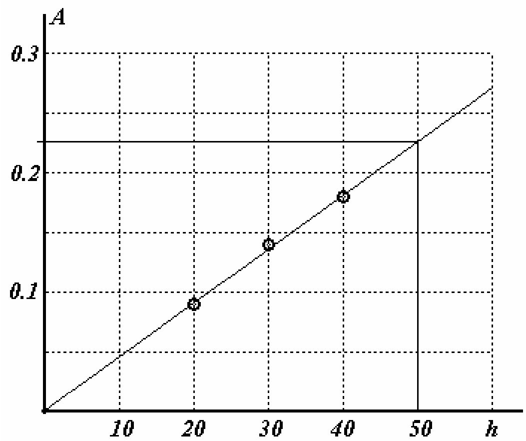
$$A = 2\frac{\Delta S}{\Delta n^2}. (3)$$

Получим следующие значения

$h = 20$ см, $A \approx 0{,}09$ м

$h = 30$ см, $A \approx 0{,}14$ м

$h = 40$ см, $A \approx 0{,}18$ м



Можно заметить, что ускорение прямо пропорционально высоте h. Еще лучше построить график зависимости *A(h)* и убедится в ее прямой пропорциональности.

С помощью графика, либо непосредственно по численным значениям легко определить коэффициент пропорциональности. Окончательно получаем $A \approx 0{,}46h$, где высота h измеряется в *метрах*.

Легко показать, что ускорение при движении по наклонной плоскости пропорционально синусу угла наклона, который при постоянной длине желоба пропорционален высоте h. Действительно, кинетическая энергия катящегося шара пропорциональна квадрату скорости $E_{кин} = Cv^2$, где C – постоянный коэффициент, зависящий не только от распределения масс внутри шара, но и от глубины желоба. Пренебрегая работой против сил трения качения, можем приравнять кинетическую энергию в конце желоба к начальной потенциальной энергии

$$Cv^2 = mgh. (4)$$

С другой стороны при равноускоренном движении справедлива формула

$$L = \frac{v^2}{2a}, \ (5)$$

где a – ускорение шара. Из формул (4) – (5) следует $a = \dfrac{mgh}{2CL} \propto h$.

3. При высоте $h = 50$ см ускорение примерно равно $A \approx 0{,}23$. Поэтому путь пройденным шаром за пять колебаний маятника

$$S = \frac{An^2}{2} \approx 2{,}88 \text{ м.}$$