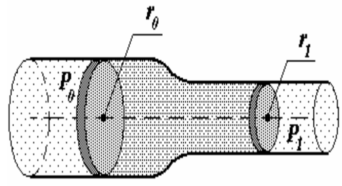
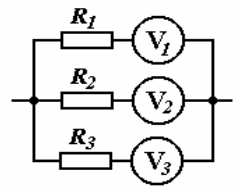
Условия задач. Теоретический тур.

1. (12 баллов). Внутри сочлененной трубы, состоящей из двух цилиндрических коаксиальных труб радиусов r_o и r_1, находятся два плотно пригнанных поршня, которые могут двигаться вдоль труб без трения. Пространство между поршнями заполнено несжимаемой жидкостью плотностью ρ. С внешних сторон от поршней находится газ, давления которого поддерживаются постоянными и равными с одной стороны p_o, а с другой p_1. Найдите постоянные скорости установившихся движений поршней. Вязкостью жидкости (внутренним трением) пренебречь.



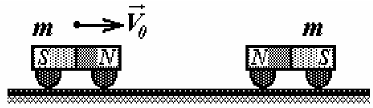
2. (12 баллов). В большую кастрюлю налили $V_o = 2{,}0$ л холодной воды при температуре $t_o = 15$ °C и поставили на включенную электроплиту. За время $\tau_o = 5{,}0$ мин температура воды достигла $t_1 = 45$ °C. После этого в кастрюлю стали медленно доливать холодную воду (при температуре $t_o = 15$ °C) с постоянной скоростью $v = 100$ см^3/мин, постоянно ее перемешивая в кастрюле. Постройте примерный график зависимости температуры воды в кастрюле от времени. При какой скорости наливания холодной воды v_1 температура воды будет оставаться постоянной во время наливания? Потерями теплоты и теплоемкостью кастрюли пренебречь.

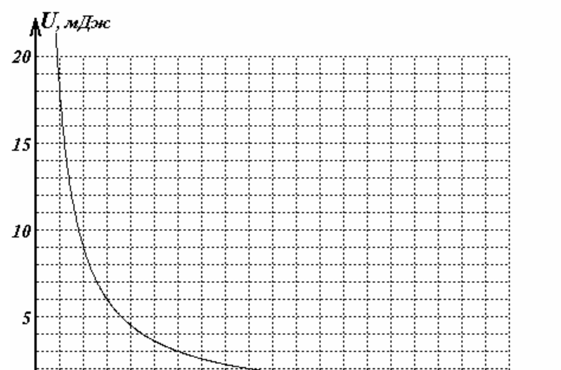
3. (6 баллов). На рисунке показана часть электрической цепи постоянного тока. Сопротивления резисторов известны и указаны на схеме. Все три вольтметра одинаковы. Первый вольтметр показывает напряжение U_1, второй U_2. Найдите показание третьего вольтметра.



4. (7 баллов). Два баскетболиста ростом $h = 2{,}0$ м каждый бросили одновременно два мяча, один под углом $\alpha_1 = 30^o$, а второй под углом $\alpha_2 = 60^o$ к горизонту. Найдите расстояние между баскетболистами в момент броска, если известно, что брошенные мячи столкнулись в воздухе на высоте $H = 5{,}0$ м над уровнем пола через время $\tau = 1{,}0$ с после броска. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь

5. (13 баллов). Две одинаковых тележки, массы которых равны $m = 200$ г, поставлены на длинные горизонтальные рельсы, по которым они могут катиться без трения. К тележкам прикреплены магниты, одноименными полюсами навстречу друг другу. Когда тележки находятся на большом расстоянии (на котором можно пренебречь магнитным взаимодействием), одной из них сообщают скорость v_o в сторону покоящейся другой. Постройте график зависимости минимального расстояния между тележками в процессе движения от начальной скорости v_o. Ниже на рисунке представлен график за-





висимости потенциальной энергии взаимодействия магнитов U от расстояния между ними.

Решение задач.

Решение 1. Пусть один поршень, двигаясь с постоянной скоростью V_o, сместился на малое расстояние x_o, тогда второй, двигаясь со скоростью V_1, сместился на расстояние x_1, причем из условия несжимаемости жидкости следует

$$x_o S_o = x_1 S_1, \ (1)$$

$$V_o S_o = V_1 S_1, \ (2)$$

где S_o, S_1 – площади поршней. Газ, находящийся слева, при этом совершит работу $P_o S_o x_o$, которая расходуется на работу второго поршня $P_1 S_1 x_1$ и увеличение кинетической энергии жидкости. Действительно, часть жидкости объемом $S_o x_o$ увеличила скорость от V_o до V_1. Таким образом, уравнение баланса энергий имеет вид

$$P_o S_o x_o = P_1 S_1 x_1 + \frac{1}{2}\rho S_o x_o \left(V_1^2 - V_o^2\right). \ (3)$$

Решая систему уравнений (1) – (3), получаем

$$V_o = \sqrt{\frac{2\left(P_o - P_1\right)}{\left(\frac{r_o^4}{r_1^4} - 1\right)}}; \ V_1 = \sqrt{\frac{2\left(P_o - P_1\right)}{\left(1 - \frac{r_1^4}{r_o^4}\right)}}; \ (4)$$

при выводе учтено, что $\frac{S_o^2}{S_1^2} = \frac{r_o^4}{r_1^4}$.

Заметим, что соотношение (3) является фактически уравнением Бернулли.

Решение 2. Найдем тепловую мощность P плиты из уравнения теплового баланса

$$P\tau_o = c\rho V_o\left(t_1 - t_o\right), \ (1) \quad P = \frac{c\rho V_o\left(t_1 - t_o\right)}{\tau_o}, \ (2)$$

где ρ и c – плотность и удельная теплоемкость воды, соответственно.

На этом этапе нагревания температура будет возрастать прямо пропорционально времени. Через время τ после начала подливания, в кастрюле будет находиться

$$V = V_o + \nu\tau, \ (3)$$

литров воды. Всего за время нагревания вода получит от нагревателя количество теплоты, которое определяется формулой $Q = P\left(\tau_o + \tau\right)$. (4)

Уравнение теплового баланса (за все время нагревания) будет иметь вид

$$P\left(\tau_o + \tau\right) = c\rho\left(V_o + \nu\tau\right)\left(t - t_o\right), \ (5)$$

где t – температура воды в момент времени τ. Подставляя выражение (2) для мощности нагревателя, получаем искомую функцию зависимости температуры от времени

$$t = t_o + \left(t_1 - t_o\right)\frac{\left(1 + \frac{\tau}{\tau_o}\right)}{\left(1 + \frac{\nu\tau}{V_o}\right)}. \ (6)$$

Эта функция является монотонной, стремящейся к предельному значению (при $\tau >> \tau_o$) $t^* = t_o + (t_1 - t_o)\dfrac{V_o}{v\tau_o}$, (7)

которое при заданных численных значениях параметров равно $t^* = 135°$. Это значение превышает температуру кипения, поэтому увеличение температуры прекратится при достижении температуры кипения $t_{кип} = 100°$. Можно найти момент времени, когда начнется кипение, для этого в уравнении (6) необходимо положить $t = t_{кип} = 100°$ и найти соответствующее значение времени $\tau \approx 28$ мин.

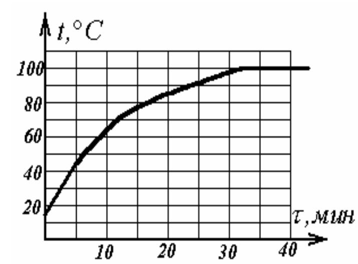


График полученной зависимости показан на рисунке. Значение скорости наливания v_1, при котором температура воды в кастрюле будет оставаться постоянной можно найти из формулы (6), в котором второе слагаемое должно не зависеть от времени τ. Это возможно, только при $\dfrac{\tau}{\tau_o} = \dfrac{v\tau}{V_o}$. То есть, при $v = \dfrac{V_o}{\tau_o} = 0{,}4$ л/мин.

Заметим, что это же значение можно получить из уравнения теплового баланса $c\rho v_1(t_1 - t_o) = P$.

Решение 3. Показания вольтметров различны, так как они обладают собственным сопротивлением, которое мы обозначим R_V, которое сравнимо с сопротивлением резисторов. Принимая во внимание законы последовательного и параллельного соединения, можем записать:

сила тока в каждой ветви цепи $I_k = \dfrac{U_o}{R_k + R_V}$; (1)

напряжение на k – том вольтметре $U_k = I_k R_V = \dfrac{U_o R_V}{R_k + R_V}$, (2)

где $U_о$ – напряжение на каждой ветви.

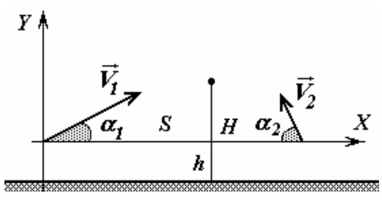
Зная сопротивления резисторов и значения напряжений на двух вольтметрах, из уравнений (2) можно найти сопротивление вольтметра

$$R_V = \frac{U_1 R_1 - U_2 R_2}{U_1 - U_2}, (3)$$

и напряжение на третьем вольтметре $U_3 = \dfrac{U_1 U_2 (R_1 - R_2)}{U_1(R_3 - R_1) - U_2(R_3 - R_2)}$. (4)

Решение 4. Из кинематических законов равноускоренного движения можно записать следующие уравнения

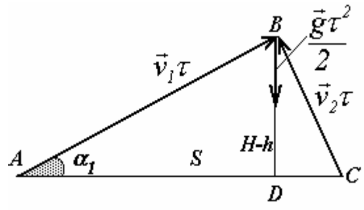
$$\begin{cases} H - h = v_1\tau\sin\alpha_1 - \dfrac{g\tau^2}{2} \\ H - h = v_1\tau\sin\alpha_1 - \dfrac{g\tau^2}{2} \\ S = v_1\tau\cos\alpha_1 + v_1\tau\cos\alpha_1 \end{cases}; (1)$$



Из первых двух уравнений следует выразить значения $v_1\tau$ и $v_2\tau$ и подставить их в третье уравнение системы (1)

$$S = \left(H - h + \frac{g\tau^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} + \frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}\right) \approx 18 \text{ м. } (2)$$

Данная задача допускает также более простое «геометрическое» решение. Представим закон движения каждого мяча в векторной форме $\vec{r} = \vec{v}\tau - \dfrac{\vec{g}\tau^2}{2}$ *и изобразим его графически. Можно заметить, что треугольники ABC и ABD прямоугольные (т.к.* $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$*) поэтому*



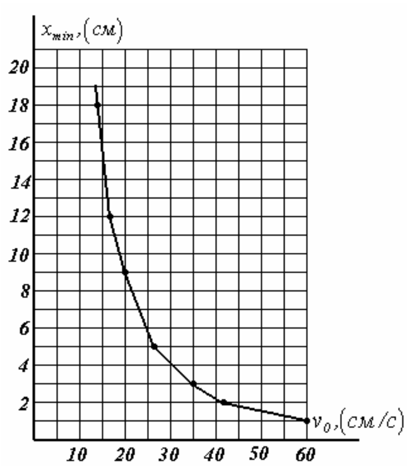
$$S = |AC| = \frac{|AB|}{\cos\alpha_1} = \frac{1}{\cos\alpha_1}\cdot\frac{|BD|}{\sin\alpha_1} = \frac{H - h + \dfrac{g\tau^2}{2}}{\cos\alpha_1 \sin\alpha_1}$$

что приводит к тому же численному результату.

<u>Решение 5.</u> Запишем уравнения законов сохранения механической энергии и импульса, учитывая, что в момент наибольшего сближения x скорости тележек равны (обозначим это значение v)

$$\frac{mv_o^2}{2} = 2\frac{mv^2}{2} + U(x);\ (1)\quad mv_o = 2mv.\ (2)$$

Из этих уравнений находим, что при минимальном сближении потенциальная энергия взаимодействия определяется выражением $U(x) = \dfrac{mv_o^2}{4}$; (3)



Используя эту формулу и прилагаемый график зависимости $U(x)$ можно рассчитать значения начальной скорости, при которой минимальное расстояние будет равно x_{min} с помощью выражения $v_o = 2\sqrt{\dfrac{U(x_{min})}{m}}$. (4)

Результаты таких расчетов представлены в таблице и на графике ыы

x_{min} см	U, мДж	v_o, см/с
1	18	60
2	9	42
3	6	35
5	3,5	26
9	2	20
12	1,5	17
18	1	14