Республиканская олимпиада. 9 класс. Мозырь. 2002 г.

Условия задач. Теоретический тур.

1. Материальная точка прошла путь S. Определите среднюю скорость и среднее ускорение точки за весь пройденный путь, если

а) первую половину времени движения точка двигалась с постоянной скоростью v_1, а его вторую половину с постоянной скоростью v_2;

б) первую половину пройденного пути точка двигалась с постоянной скоростью v_1, а его вторую половину с постоянной скоростью v_2;

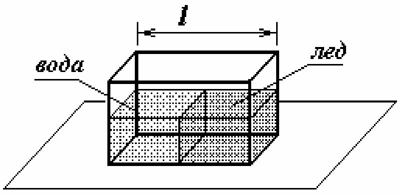
в) первую половину времени движения точка двигалась с постоянным ускорением a_1, а его вторую половину с постоянным ускорением a_2;

г) первую половину пройденного пути точка двигалась с постоянным ускорением a_1, а его вторую половину с постоянным ускорением a_2.

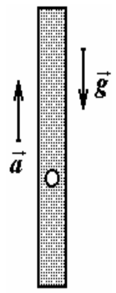
В пунктах в), г) начальная скорость точки равнялась нулю, и скорость менялась непрерывно за все время движения.

2. В большом теплоизолированном сосуде находится m_o = 1,0 кг переохлажденной воды, находящейся при температуре t_o = –5,0 ^oC. В воду маленьким порциями добавляют небольшие кусочки льда при температуре t_1 = –20 ^oC. Сколько льда необходимо добавить в сосуд, чтобы вся находящаяся в нем вода замерзла? Теплоемкостью сосуда и теплообменом с окружающей средой пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_o = 4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплоемкость льда $c_o = 2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда λ = 330 кДж/кг, атмосферное давление нормальное.

3. На гладкой горизонтальной поверхности расположен сосуд в форме параллелепипеда длиной l. Часть сосуда заполнена льдом, который прикреплен к стенкам сосуда, как показано на рисунке. Другая, такая же по объему часть сосуда заполнена водой. Высота льда и высота уровня воды, естественно, совпадают. На сколько и в какую сторону сместится сосуд, когда весь лед растает? Плотность воды ρ_o, плотность льда ρ_1. Вода из сосуда не выливается.



4. Длинная вертикальная закрытая с обоих концов трубка полностью заполнена вязкой жидкостью. Внутри трубки находится небольшой пузырек воздуха, который медленно поднимается с постоянной скоростью v_o. С какой скоростью относительно трубки будет двигаться пузырек, если трубка будет подниматься с постоянным ускорением a? С каким ускорением нужно двигать трубку, чтобы пузырек начал двигаться вниз со скоростью v_o относительно трубки?



5. Проводник из графита, сопротивление которого зависит от температуры, подключили к источнику напряжения, величина которого равна U. Зависимость сопротивления проводника от температуры описывается формулой $R = R_o\left(1-\alpha t\right)$, где R_o, α – постоянные положительные величины, t – температура проводника, измеренная в градусах Цельсия. Проводник находится в среде, температура которой поддерживается постоянной и равной 0 °С. Мощность теплоты P, передаваемой проводником в среду, пропорциональна Δt разности температур проводника и среды $P = \beta\Delta t$, где β – положительный коэффициент.

а) укажите размерности коэффициентов R_o, α, β;

б) найдите зависимость установившейся температуры проводника от напряжения источника, постройте примерный график этой зависимости;

в) найдите зависимость установившегося значения силы тока через проводник от напряжения источника, постройте примерный график этой зависимости.

Решение задач.

Решение 1. По определению, средней скоростью называется отношение пройденного пути ко времени движения $<v>=\frac{S}{t}$, а средним ускорением отношение изменения скорости ко времени, за которое это изменение произошло $<a>=\frac{\Delta v}{\Delta t}$.

а) Обозначим все время движение точки τ. Тогда средняя скорость может быть рассчитана по формуле

$$<v>=\frac{v_1\frac{\tau}{2}+v_2\frac{\tau}{2}}{\tau}=\frac{v_1+v_2}{2}. \ (1)$$

Изменение скорости $\Delta v = v_2 - v_1$, произошло за время движения $\tau=\frac{S}{<v>}=\frac{2S}{v_1+v_2}$, поэтому среднее ускорение

$$<a>=\frac{\Delta v}{\tau}=\frac{v_2^2-v_1^2}{2S}. \ (2)$$

б) В этом случае время движения $\tau=\frac{S}{2v_1}+\frac{S}{2v_2}=\frac{S}{2}\frac{v_1+v_2}{v_1v_2}$, поэтому средняя скорость

$$<v>=\frac{S}{\tau}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}, \ (3)$$

а среднее ускорение

$$<a>=\frac{\Delta v}{\tau}=\frac{2v_1v_2\left(v_2-v_1\right)}{S\left(v_2+v_1\right)}. \ (4)$$

в) Учитывая, что начальная скорость точки на первом участке равна нулю, а начальная скорость на втором участке равна конечной скорости первого участка, запишем выражение для пройденного пути

$$S=\frac{a_1\left(\frac{\tau}{2}\right)^2}{2}+a_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\cdot\left(\frac{\tau}{2}\right)+\frac{a_2\left(\frac{\tau}{2}\right)^2}{2}=\frac{\tau^2}{8}\left(3a_1+a_2\right),$$

из которого определим время движения

$$\tau=\sqrt{\frac{8S}{3a_1+a_2}}. \ (5)$$

Таким образом, средняя скорость в этом случае

$$< v >= \frac{S}{\tau} = \sqrt{\frac{S\left(3a_1 + a_2\right)}{8}}. \ (6)$$

Изменение скорости на всем пути определяется формулой $\Delta v = a_1 \frac{\tau}{2} + a_2 \frac{\tau}{2}$, поэтому среднее ускорение в этом случае равно

$$< a >= \frac{\Delta v}{\tau} = \frac{a_1 + a_2}{2}. \ (7)$$

г) Пусть первую половину пути точка прошла за время τ_1, которое можно определить из формулы

$$\frac{S}{2} = \frac{a_1 \tau_1^2}{2} \Rightarrow \tau_1 = \sqrt{\frac{S}{a_1}}. \ (8)$$

Для второго участка пути справедливо соотношение $\frac{S}{2} = a_1 \tau_1 \tau_2 + \frac{a_2 \tau_2^2}{2}$, из которого найдем время движения на втором участке (с учетом формулы (8))

$$\tau_2 = \sqrt{S}\, \frac{\sqrt{a_1 + a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2}. \ (9)$$

Теперь можно найти среднюю скорость

$$< v >= \frac{S}{\tau_1 + \tau_2} = \sqrt{a_1 S}\, \frac{a_2}{a_2 - a_1 + \sqrt{a_1\left(a_2 + a_1\right)}} \ (10)$$

и среднее ускорение

$$< a >= \frac{\Delta v}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{a_2 \sqrt{a_1\left(a_2 + a_1\right)}}{a_2 - a_1 + \sqrt{a_1\left(a_2 + a_1\right)}}. \ (11)$$

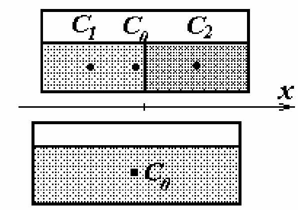
Решение 2. Основная проблема, возникающая при реализации описанной ситуации (замораживании воды), заключается в «утилизации» большого количества теплоты, выделяющейся при кристаллизации. Действительно, при замерзании воды выделится количество теплоты $Q_1 = \lambda m_o = 330$ кДж. На нагревание этой же воды может пойти количество теплоты $Q_2 = c_o m_o \left(t_{kp} - t_o\right) \approx 21$ кДж, где $t_{кр} = 0$ $^{\circ}$C – температура кристаллизации воды при нормальном давлении. Поэтому оставшееся количество теплоты $Q_1 - Q_2$ должно пойти на нагреваемого льда (но при этом он не должен расплавиться!). Таким образом, для замораживания всей воды должно выполняться следующее уравнение теплового баланса

$$Q_1 - Q_2 = c_1 m_x \left(t_{кр} - t_1\right),$$

из которого находим искомую массу льда

$$m_x = \frac{Q_1 - Q_2}{c_1 m_x \left(t_{кр} - t_1\right)} \approx 7{,}4 \text{ кг}.$$

Решение 3. Для решения задачи необходимо заметить, что на рассматриваемую систему не действуют внешние силы, имеющие горизонтальные составляющие. Поэтому горизонтальная координата центра масс не может измениться при любых процессах, проходящих внутри системы.



Очевидно, что после плавления льда центр масс сосуда будет находится на середине сосуда. Найдем горизонтальную координату x_0 центра масс системы в начальном состоянии.

$$x_o = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, (1)$$

где $x_1 = -l/4$, $x_2 = +l/4$ координаты центров масс воды и льда, соответственно; $m_1 = \rho_1 S \frac{l}{2}$, $m_2 = \rho_2 S \frac{l}{2}$ – массы воды и льда, S – площадь поперечного сечения сосуда. Подставив эти значения в формулу (1) получим

$$x_o = -\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \cdot \frac{l}{2}, (2)$$

на такую же величину сместится сосуд после плавления льда и установления равновесия воды в сосуде.

Решение 4. Равномерное движение пузырька обеспечивается равенством сил, действующих на него. Так, при неподвижной трубке сила Архимеда уравновешивается силой вязкого трения

$$\rho g V = \beta v_o, (1)$$

где V – объем пузырька. При подъеме трубки с постоянным ускорением в это уравнение пример вид (проще всего обосновать это выражение, перейдя в неинерциальную систему отсчета, связанную с трубкой):

$$\rho(g + a)V = \beta v_1 .(2)$$

Из выражений (1)-(2) находим скорость установившегося движения пузырька

$$v_1 = v_o \frac{g + a}{g}. (3)$$

Формула (3) применима для любых ускорений трубки, поэтому легко заметить, что скорость пузырька станет равной $-v_0$, при ускорении трубки равном $-2g$, то есть при движении вниз с ускорением в два раза большем ускорения свободного падения.

Решение 5. а) размерности коэффициентов следуют из вида приведенных формул: $[R_0] = Ом$; $[\alpha] = град^{-1}$; $[\beta] = \frac{[P]}{[t]} = \frac{Вт}{град}$.

б) В установившемся режиме мощность теплоты, выделяющейся при прохождении тока через проводник (которая определяется законом Джоуля – Ленца), равна мощности теплоты, отдаваемой проводником в окружающую среду

$$\frac{U^2}{R_o(1 - \alpha t)} = \beta t . (1)$$

Это уравнение является квадратным относительно неизвестной установившейся температуры. Решение этого уравнения имеет вид

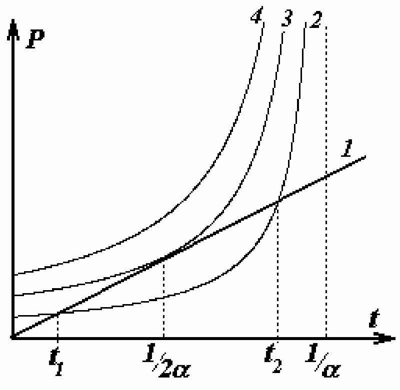
$$t = \frac{1}{2\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_o^2}}\right), (2)$$

где обозначено $U_o = \sqrt{\frac{R_o \beta}{4\alpha}}$.

В зависимости от приложенного напряжения U, уравнение (1) имеет либо два корня (при $U < U_o$); либо один корень (при $U = U_o$); либо корней не имеет (при $U > U_o$).

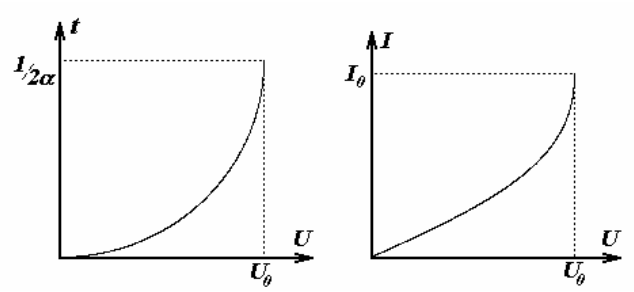
Чтобы уяснить физический смысл полученных результатов и выбрать нужное значение корня представим уравнение (1) в графической форме: изобразим примерные графики зависимости рассматриваемых мощностей от температуры проводника.

Прямая 1 является зависимостью мощности теплоты, отдаваемой в среду, кривые 2,3,4 -зависимости мощностей, выделяемых в проводнике, построенные при разных значениях напряжения источника.



Кривая 2 соответствует наличию двух корней t_1, t_2 уравнения 1. Можно заметить, что корень t_1 является устойчивым: при $t < t_1$ мощность, выделяющаяся в проводнике, превосходит мощность, отдаваемую в среду, поэтому проводник будет нагреваться; при $t > t_1$ ситуация обратная, поэтому проводник будет остывать до температуры t_1. Корень t_2 – неустойчив: при $t < t_2$ проводник будет остывать до температуры t_1; при $t > t_2$ проводник будет разогревать до бесконечности, так на этом этапе мощность, выделяемая в проводнике, возрастает быстрее мощности, отдаваемой в среду.

Кривая 3 построена для случая единственного корня, который как видно из графика неустойчив – проводник будет разогреваться.



Отсутствие корней иллюстрирует кривая 4 – в этом случае отсутствует равновесное значение температуры – при любом ее значении проводник разогревается быстрее, чем остывает.

Таким образом, при $U < U_o$ установившаяся температура определяется формулой $t_1 = \frac{1}{2\alpha}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_o^2}}\right)$, если начальная температура проводника меньше, чем $t_2 = \frac{1}{2\alpha}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_o^2}}\right)$. В остальных случаях установившейся температуры не существует - проводник неограниченно разогревается. Примерный график рассмотренной зависимости $t(U)$ показан на рисунке.

в) зависимость силы тока от напряжения легко получить, используя закон Ома и зависимость температуры от приложенного напряжения:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_o\left(1 - \alpha t\right)} = \frac{2U}{R_o\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{U^2}{U_o^2}}\right)}.$$

Примерный график этой зависимости $I(U)$ также показан на рисунке.