ЗОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА
9 КЛАСС 1994 г.
Условия задач.

17. Космонавт совершает перелет вдоль прямой из точки A в точку B. График его движения изображен на рис. 66 (v – скорость космонавта, x – его координата). Найдите время движения космонавта из точки A в точку B.

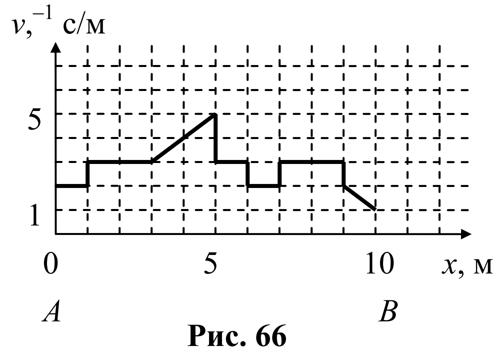

Рис. 66

18. Стоял засушливый июль. Самолет противопожарной службы, производя аэрофотосъемку пожароопасных районов, сфотографировал село Верхние Колдобы Усть-Колдобинского района. На снимке (см. рис. 67, масштаб 1:1250) видны четыре неглубоких пруда, причем, как видно, пересохли все ручейки – как те, которые снабжали пруды водой, так и отводившие ее излишки в речку Колдобинку. Определите, какой из прудов пересохнет последним, если в момент съемки пруды содержали V_1 = 200 м^3, V_2 = 30 м^3, V_3 = 500 м^3 и V_4 = 2 м^3 воды соответственно. Можно считать, что каждый из Верхнеколдобинских прудов имеет постоянную глубину по всей площади.

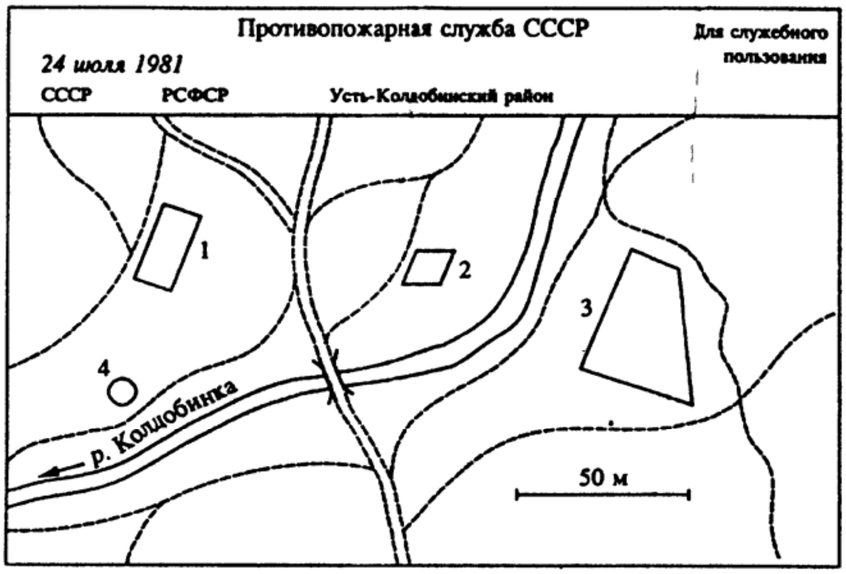

Рис.67

19. При плавании порожней рыболовной шхуны в одном из морей ватерлиния (уровень максимального погружения шхуны) находится на высоте $h_п$ = 0,5 м от поверхности воды, а в другом (более соленом) – на высоте $h_с$ = 0,6 м. При этом максимальная загрузка рыбой в первом море составляет $m_п$ = 50 тонн, а во втором – $m_с$ = 63 т. Найдите массу $m_о$ корабля без груза. Борта корабля в рассматриваемом диапазоне погружений можно считать вертикальными.

20. Полдень. По горизонтальному участку шоссе, ведущему строго на северо-восток движется фургон. По задней стенке фургона мелькают тени деревьев, находящихся на обочине дороги. Если тень верхушки какого-либо дерева пробегает от одного угла задней стенки по диагонали до другого угла, то на это уходит 0,1 с. Нарисуйте, как движется тень верхушки дерева в этом случае. Как движутся тени других верхушек? Найдите скорость фургона и высоту Солнца над горизонтом (высота Солнца измеряется в градусах). Задняя стенка фургона вертикальна и имеет 2,5 м по вертикали и 1,5 м по горизонтали.

Всероссийская олимпиада
9 КЛАСС 1993 г.
Условия задач.

21. Самолет летит горизонтально по прямой со скоростью v_0 = 720 км/ч. Определите, на какую величину надо изменить скорость самолета, чтобы он смог, оставаясь в горизонтальной плоскости, описать окружность радиуса R = 8 км. Каков при этом угол наклона самолета? Подъемная сила направлена перпендикулярно плоскости крыльев и пропорциональна квадрату скорости самолета (коэффициент пропорциональности в обоих случаях можно считать одинаковым). Ускорение свободного падения можно положить равным 10 м/с^2.

22. Два стальных шарика находятся в одной точке горизонтальной плоскости. Шарики одновременно бросают с одинаковой по величине начальной скоростью. Начальная скорость первого шарика составляет угол $\alpha_1 = 30^\circ$ с горизонтом, скорость второго – некоторый угол α_2, причем $45° < \alpha_2 < 90°$. Горизонтальная координата x_1 первого шарика изменяется во время полета по закону, представленному на графике (см. рис. 142). Спустя время t = 7/5 с после броска оба шарика оказались на одной высоте над плоскостью. Определите угол α_2, под которым брошен второй шарик, а также расстояние между шариками через 1 с после броска. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ускорение свободного падения можно положить равным 10 м/с^2.

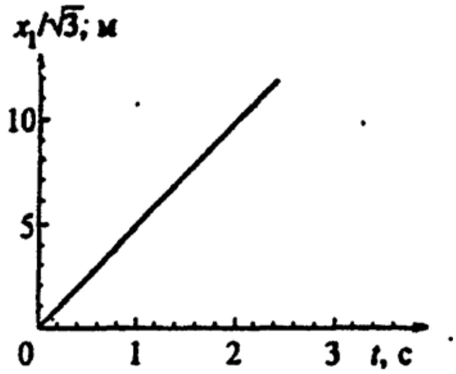

Рис.142

23. В прямой цилиндрический сосуд, площадь основания которого S = 100 см^2, налили 1 л соленой воды плотности ρ_1 = 1,15 г/см^3, и опустили льдинку из пресной воды. Масса льдинки m = 1 кг. Определите, как изменится уровень воды в сосуде, если половина льдинки растает. Считайте, что при растворении соли в воде объем жидкости не изменяется.

24. Лабораторная электроплитка, сопротивление спирали которой R = 20 Ом, включена в сеть последовательно с резистором, сопротивление которого R_0 = 10 Ом. При длительной работе плитка нагрелась от комнатной температуры t_0 = 20 °С до температуры t_1 = 52 °С. До какой температуры нагреется плитка, если параллельно ей включить еще одну такую же плитку?

Решения задач.

Решение 17. Площадь под графиком численно равна искомому времени (действительно, $\Delta x/v = \Delta t$). После несложных вычислений получаем: t = 28,5 с.

Решение 18. В засушливую погоду (т. е. при малой влажности) количество испаряемой воды из водоема пропорциональна площади водной поверхности, а это значит, что для всех прудов будет постоянная скорость уменьшения глубины прудов.

Фактически дольше всех будет пересыхать самый глубокий пруд. Разделив указанные в условии объемы воды на измеренную на фотографии площадь для каждого из прудов (S_1 = 250 м^2, S_2 = 100 м^2, S_3 = 1000 м^2, S_4 = 40 м^2), находим: h_1 = 0,8 м, h_2 = 0,3 м, h_3 = 0,5 м, h_4 = 0,05 м, так что последним пересохнет 1 пруд.

Решение 19. Обозначим площадь горизонтального поперечного сечения шхуны через S (поскольку борта шхуны считаются вертикальными, S постоянно для всех случаев), плотность менее соленой воды через $\rho_{\text{п}}$, более соленой – через $\rho_{\text{с}}$. Тогда в менее соленой воде $m_n = \rho_n S h_n$, в более соленой $m_c = \rho_c S h_c$.

Сразу же получаем

$$\frac{\rho_c}{\rho_n} = \frac{m_c}{m_n}\frac{h_n}{h_c} = \frac{1{,}26}{1{,}2} = 1{,}05\,.$$

Далее, обозначив через V_n объем воды вытесняемой порожним судном в менее соленом море, а через V_c – в более соленом, получим:

$$m_o = \rho_n V_n,\; m_o = \rho_c V_c,\; \frac{V_c}{V_n} = \frac{\rho_n}{\rho_c},$$

$$V_n - V_c = S(h_c - h_n) = Sh_c - Sh_n = \frac{m_c}{\rho_c} - \frac{m_n}{\rho_n},$$

$$m_o = \left(\frac{m_c}{\rho_c} - \frac{m_n}{\rho_n}\right)\frac{\rho_c\rho_n}{\rho_c - \rho_n} = \frac{m_c - 1{,}05 m_n}{1{,}05 - 1} \text{ или } \frac{m_c - m_n\dfrac{\rho_c}{\rho_n}}{\dfrac{\rho_c}{\rho_n} - 1} = 210 \text{ т.}$$

Решение 20. На двух рисунках (вид сверху и вид сбоку) изображена схема движения фургона (рис. 14, а и б). Отметим на каждом из этих рисунков по два положения задней стенки фургона: (1) в тот момент, когда тень верхушки дерева начинает движение по стенке и (2) в тот момент, когда она завершает это движение. Из первого рисунка видно, что тень должна двигаться справа налево, а из второго – сверху вниз, т. е. от точки D к точке A (рис. 14, в). Другие тени будут двигаться параллельно этой линии. Обозначим время пробегания тени по задней стенке через τ, скорость фургона – через v, угол между направлением дороги и азимутом направления на Солнце (в нашем случае, поскольку дело происходит ровно в полдень – это направление Север – Юг) – через α, а высоту Солнца над горизонтом – через β, тогда будут справедливы следующие соотношения:

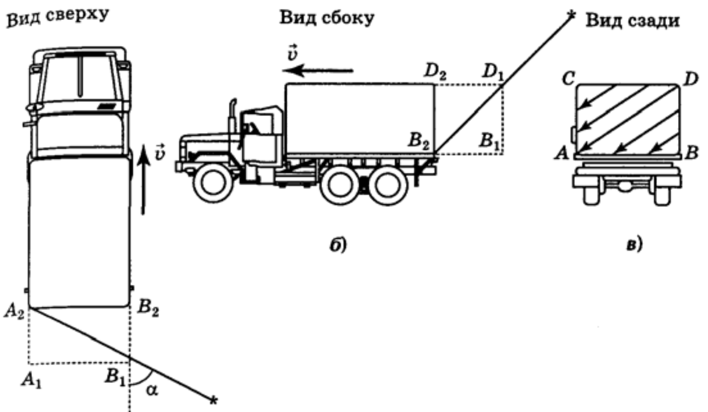

Рис. 14

$$v = \frac{A_1A_2}{\tau},\; tg\alpha = \frac{AB}{A_1A_2},\; tg\beta = \frac{BD}{A_2B_1},$$

$$|A_1A_2|^2 + |AB|^2 = |A_2B_1|^2 .$$

Поскольку в нашем случае $\tau = 0{,}1$ с, $\alpha = 45^o$, $|AB| = |A_1A_2| = 2{,}5$ км, $|BD| = 2{,}0$ м, получаем

$$v = \frac{2{,}5}{0{,}1} = 25 \text{ м/с} = 90 \text{ км/ч}, \; tg\beta = \frac{2}{\sqrt{12{,}5}} \approx 0{,}57, \; \beta \approx 30^o .$$

Решение 21. При полете по прямой: $mg = F_1 = kv_o^2$, где F_1 – подъемная сила, отсюда $k = \dfrac{mg}{v_o^2}$.

При движении самолета по окружности в горизонтальной плоскости (рис. 15) подъемную силу F_2 можно разложить на составляющие:

по оси y: $mg = F_2 \cos\alpha = kv^2 \cos\alpha$,

по оси x: $F_2 \sin\alpha = m\dfrac{v^2}{R}$.

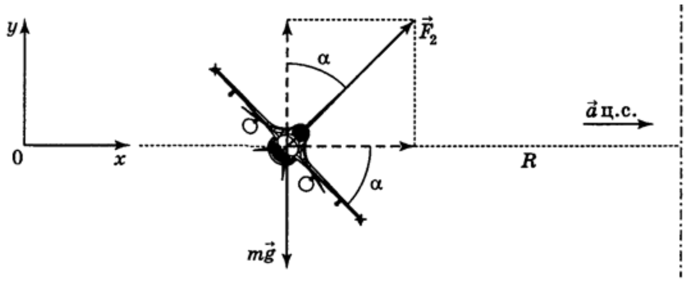

Рис. 15

Из последних равенств находим

$$\sin\alpha = \frac{v_o^2}{gR} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^o, \; v = \frac{v_o}{\sqrt{\cos\alpha}} \approx 215 \text{ м/с} = 774 \text{ км/ч}.$$

Изменение скорости равно $\Delta v = v - v_o \approx 54$ км/ч.

Решение 22. Уравнение движения первого шарика по оси x (рис. 16):

$$x_1 = v_1 \cos\alpha_1 \cdot t .$$

Используя график $x_1 = f(t)$, получим

$$v_1 = \frac{x_1}{t\cos\alpha_1} = 2\frac{x_1}{\sqrt{3}t}, \; v_1 = 10 \text{ м/с} = v_2 = v,$$

где v_1 и v_2 – начальные скорости первого и второго шариков соответственно.

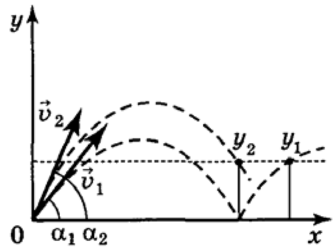

Рис. 16

Время полета первого шарика до удара о плоскость

$$t_1 = \frac{2v\sin\alpha_1}{g} = 1 \, c;$$

Время полета этого шарика после удара

$$\tau = \frac{7}{5} \, c - t_1 = \frac{2}{5} \, c.$$

Итак, первый шарик через время $t = \dfrac{7}{5} \, c$ окажется на высоте

$$y_1 = (v\sin\alpha_1)\tau - \frac{g\tau^2}{2} = \frac{6}{5} \text{ м}.$$

В то же время, равное $t = \dfrac{7}{5} \, c$, высота, на которой находится второй шарик, равна

$$y_2 = (v\sin\alpha_2)\tau - \frac{g\tau^2}{2} = 14\sin\alpha_2 - \frac{49}{5}.$$

Заметим, что к моменту t второй шарик еще ни разу не ударится о поверхность. Это можно показать, оценив время его полета до первого удара. Описанная ситуация описана на рисунке 16.

По условию задачи $y_1 = y_2$.

Следовательно,

$$14\sin\alpha_2 - \frac{49}{5} = \frac{6}{5} \Rightarrow \sin\alpha_2 = \frac{11}{14} \text{ или } \alpha_2 \approx 52^\circ.$$

Расстояние l между шариками в момент времени $T = 1$ с равно

$$l = |\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \left|\vec{v}_1 T + \frac{\vec{g}T^2}{2} - \left(\vec{v}_2 T + \frac{\vec{g}T^2}{2}\right)\right| = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\,T =$$

$$= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \cdot T = \sqrt{14} \text{ м} = 3,7 \text{ м}.$$

Решение 23. Вначале лед, масса которого m, вытесняет объем воды $V_1 = \dfrac{m}{\rho_1}$, где ρ_1 – начальная плотность воды. После того, как лед массы $m/2$ растаял, вытесняется объем воды $V_2 = \dfrac{m}{2\rho_2}$, где ρ_2 – конечная плотность воды. Объем добавившейся воды равен $V' = \dfrac{m}{2\rho}$, где ρ – плотность пресной воды. Изменение уровня воды в сосуде равно

$$\Delta h = \frac{V_2 + V' - V_1}{S} = \frac{m}{S}\left(\frac{1}{2\rho_2} + \frac{1}{2\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right).$$

Конечная плотность воды ρ_2 равна отношению полной массы воды $\rho_1 V + \dfrac{m}{2}$ к полному объему $V + \dfrac{m}{2\rho}$, т. е.

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{V + \dfrac{m}{2\rho_1}}{V + \dfrac{m}{2\rho}},$$

где $V = 1$ л – начальный объем воды.

Подставляя числовые значения, получим $\rho_2 = 1,1$ г/см^3 и $\Delta h \approx 0,85$ см.

Таким образом, уровень воды в сосуде повысится.

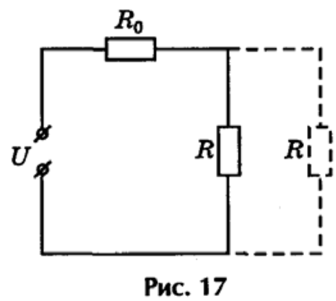

Рис. 17

Решение 24. Иллюстрацией к решению служит рис. 17. Запишем для первого случая:

$$I_1^2 R = k(t_1 - t_o),\ I_1 = \frac{U}{R_o + R},$$

следовательно,

$$\frac{U^2R}{(R_o+R)^2}=k(t_1-t_o). \quad (1)$$

Аналогично для второго случая

$$I_2=\frac{1}{2}\frac{U}{\left(R_o+\frac{R}{2}\right)},\ \frac{U^2R}{4\left(R_o+\frac{R}{2}\right)^2}=k(t_x-t_o). \quad (2)$$

Разделив (2) на (1), получим

$$t_x-t_o=(t_1-t_o)\frac{(R_o+R)^2}{4\left(R_o+\frac{R}{2}\right)^2}=18\ {}^oC\,.$$

Таким образом, t_x = 38 $^{\circ}$C.