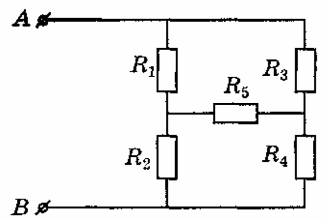
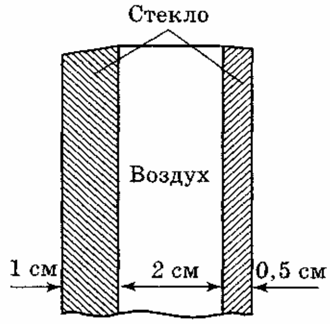
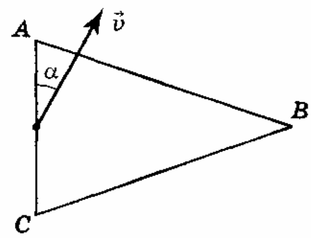
ЗОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА
9 КЛАСС. 1997 г.
Условия задач.



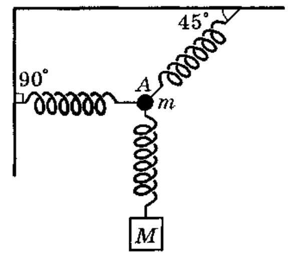
41. Найдите сопротивление R_{AB} цепи, изображенной на рис. Известно, что $R_1 = 3$ кОм, $R_2 = 8$ кОм, $R_3 = 21$ кОм, $R_4 = 56$ кОм, $R_5 = 9{,}625$ кОм.



42. Во время ремонта магазина были установлены новые рамы с двумя стеклами для витрин, конструкция которых приведена на рис.: толщина L толстого стекла равна 1 см, а тонкого $l = 0{,}5$ см; расстояние между рамами 2 см. Одну раму установили толстым стеклом внутрь магазина, а другу – наружу. Какая температура воздуха установится между стеклами в каждой из рам, если температура в магазине +20 ^{o}С, а на улице – 10 ^{o}С. Считается, что теплопередача пропорциональна разности температур, а температура воздуха между стеклами из-за конвекции воздуха всюду одинакова.

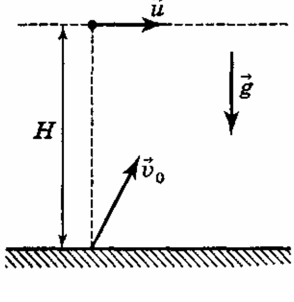


43. На гладкой горизонтальной поверхности, ограниченной вертикальными стенками, образующими равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC = L$, $\angle ABC << 1$). У середины стенки AC находится маленькая шайба (рис.). Шайбе сообщают скорость v, направленную под углом α к AC. Оцените время между двумя последовательными ударами шайбы о стенку AC. Удары шайбы о стенки считайте абсолютно упругими.



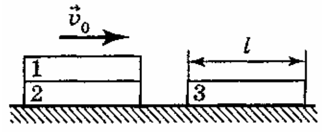
44. Груз массы M и шарик массы m висят на трех невесомых пружинах одинаковой жесткости (рис.). Верхняя пружина отрывается в точке A. Определите ускорение a (модуль и направление) шарика в начальный момент после отрыва.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА
9 класс. 1997 г.
Условия задач.

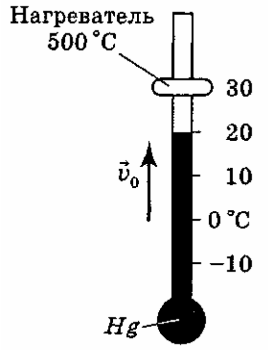


45. Птица летит горизонтально на высоте H с постоянной скоростью u (рис.). Плохой мальчик из 9 класса замечает птицу в момент, когда она находится в точности над его головой, и сразу же стреляет из рогатки. Какой должна быть скорость и птицы, чтобы мальчик никак не смог попасть в нее? Максимальная скорость вылета камня равна v_o. Сопротивлением воздуха пренебречь.

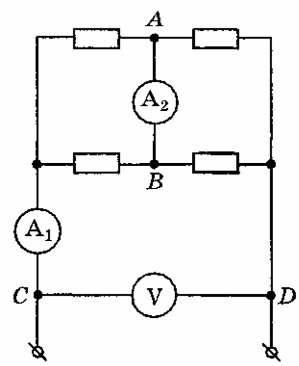
46. Доска 1 лежит на такой же доске 2. Обе они как целое скользят по гладкой ледяной поверхности со скоростью v_o и сталкиваются с такой же доской 3, верхняя поверхность которой покрыта тонким слоем резины (рис.). При ударе доски 2 и 3 прочно сцепляются. Чему равна длина l каждой доски, если известно, что доска 1 прекратила движение относительно досок 2 и 3 из-за трения после того, как она полностью переместилась с 2 на 3? Все доски твердые. Коэффициент трения между досками 1 и 3 равен k. Трением между досками 1 и 2, а также трением досок 2 и 3 о лед можно пренебречь.



47. К ртутному термометру на уровне деления t_x = 30 °C прикреплен маленький нагреватель, температура которого поддерживается постоянной и равной 500 °C (рис.). Через некоторое время столбик ртути проходит через деление t_o = 20 °C со скоростью v_o = 0,1 град/с. Найдите, через какое время температура ртути достигнет 26 °C, считая теплопроводность ртути во много раз больше теплопроводности стекла. Теплоемкостью стекла можно пренебречь, а тепловой поток от нагревателя к ртути считать пропорциональным разности температур.



48. В цепи, которая изображена на рисунке амперметр A_2 показывает силу тока 2 А. Найдите показание амперметра A_1 если известно, что резисторы имеют сопротивления 1 Ом, 2 Ом, 3 Ом и 4 Ом, а вольтметр V показывает напряжение 10 В. Все приборы считать идеальными.



Решения задач.

Решение 41. Обозначим точки подсоединения R_5 через C и D. Рассмотрим две схемы, получающиеся из исходной путем разрыва между точками C и D (рис. 29) и закорачивания этих же точек (рис. 30). Пусть напряжение между клеммами A и B равно U. Тогда силы токов в этих схемах

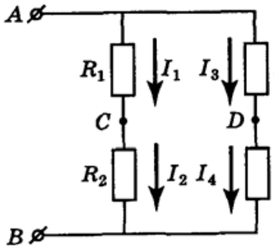


Рис. 29

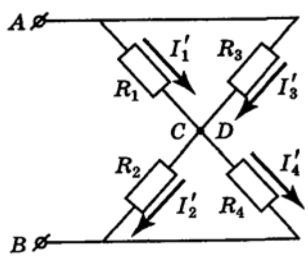


Рис. 30

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{11},\ I_3 = I_4 = \frac{U}{77},\ I_1' = I_2' = \frac{U}{11},\ I_3' = I_4' = \frac{U}{77}.$$

Заметим, что силы токов через каждое из сопротивлений R_1, R_2, R_3, R_4 одинаковы для обеих схем. Ясно, что схема на рис. 31 эквивалентна схеме на рис. 30. Сила тока через перемычку CD

$$I_5 = I_1 - I_2 = 0.$$

Поскольку сила тока на участке CD равна нулю, независимо от величины R_5, то и R_{AB} не зависит от R_5. Таким образом, для расчета сопротивления R_{AB} можно использовать любую из схем

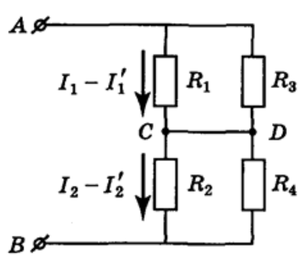


Рис. 31

на рис. 29 – 31. Воспользуемся схемой на рис. 29 и найдем:

$$R_{AB} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 9{,}625 \text{ кОм}.$$

(Совпадение с R_5 случайно!)

Решение 42. Так как теплопередача пропорциональна разности температур, то температура внутри стекла изменяется линейно. Очевидно, что температура воздуха между стеклами не зависит от расстояния между ними. Сложим два стекла вместе. Для этого случая график температуры представлен на рис. 32. Линия *AA* соответствует первому случаю, а линия *BB* – второму. Из графика видно, что температура воздуха в раме, установленной толстым стеклом наружу, равна +10 °C, а во второй раме – 0 °C.

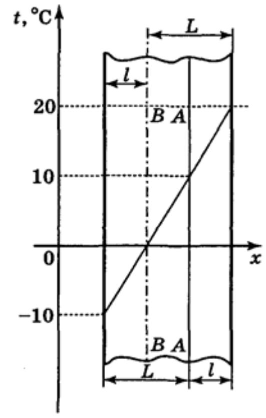


Рис. 32

Решение 43. При упругих ударах о стенки угол падения равен углу отражения. Таким образом, движение шайбы можно рассматривать на фигуре, получившейся последовательными отражениями треугольника относительно одной из боковых сторон. При малых углах $\angle ABC$ эту фигуру можно приближенно считать окружностью, а хорды l вычислять по формуле

$$l = 2AB \cdot \sin\alpha = 2L \cdot \sin\alpha .$$

Искомое время между ударами

$$t = \frac{l}{v} = 2L\frac{\sin\alpha}{v}.$$

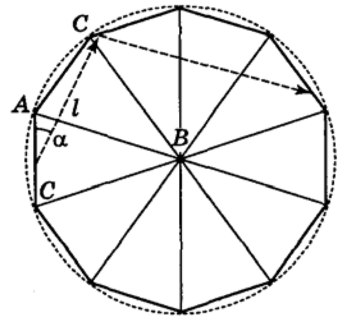


Рис. 33

Решение 44. Выберем прямоугольную систему координат *Oxy*, как показано на рисунке 34. Рассмотрим силы, действующие на шарик m до того, как верхняя пружина оторвется. Так как шарик в этот момент находится в покое, то

По *Ox*: $F_1 \cos 45^o + (F_2 + mg)\sin 45^o - F_3 = 0,$

По *Oy*: $F_1 \sin 45^o - (F_2 + mg)\cos 45^o = 0.$

Условие покоя груза *M*

$$F_2^{/} = F_2 = Mg .$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$F_3 = \sqrt{2}(M + m)g .$$

В начальный момент после отрыва пружины на шарик *m* будут продолжать действовать силы $m\vec{g}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$. Следовательно, его ускорение в начальный момент будет направлено вдоль оси x и равно

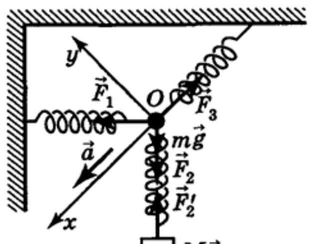


Рис. 34

$$a = \frac{F_3}{m} = \sqrt{2}\frac{M + m}{m} g .$$

Решение 45. Рассмотрим два случая.

1. Если $v_o \le \sqrt{2gH}$, то скорость *u* – любая.

2. Пусть $v_o > \sqrt{2gH}$. Рассмотрим ситуацию, когда траектория камня касается

прямой, вдоль которой летит птица. Горизонтальная проекция $v_г$ (рис. 35) скорости камня в течение всего его полета сохраняется. Ясно, что при $v_г \geq u$ мальчик может попасть в птицу, а при $v_г < u$ – нет. Из закона сохранения энергии следует, что

$$v_г = \sqrt{v_o^2 - 2gH}\ .$$

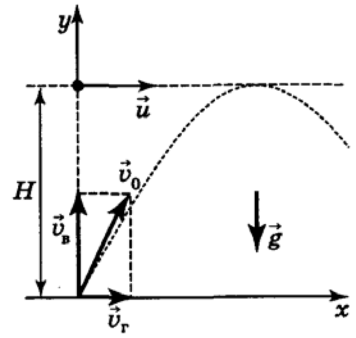


Рис. 35

Таким образом, мальчик не сможет попасть в птицу, если

$$u > \sqrt{v_o^2 - 2gH}\ .$$

Решение 46. Пусть m – масса каждой из досок, а v_1 – скорость системы после прекращения относительного движения досок. Запишем закон сохранения импульса:

$$(2m)v_o = (3m)v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{2}{3}v_o \quad (1)$$

и закон сохранения энергии

$$\frac{(2m)v_o^2}{2} = \frac{(3m)v_1^2}{2} + Q + A_{тр}, \quad (2)$$

где Q – количество теплоты, выделившейся при неупругом ударе досок 2 и 3, $A_{тр}$ – работа силы трения при движении доски 1 по доске 3.

Так как трение между досками 1 и 2 отсутствует, в течение процесса неупругого удара в системе брусков 2 и 3 можно применить законы сохранения импульса и энергии;

$$mv_o = (2m)u \Rightarrow u = \frac{v_o}{2}, \quad (3)$$

$$\frac{mv_o^2}{2} = \frac{(2m)u^2}{2} + Q \Rightarrow Q = \frac{1}{4}mv_o^2. \quad (4)$$

По мере того как доска 1 надвигается на доску 3, сила трения между этими досками возрастает по линейному закону от 0 до kmg (рис. 36). Работа силы трения численно равна площади заштрихованной части графика, т. е.

$$A_{тр} = \frac{1}{2}kmgl. \quad (5)$$

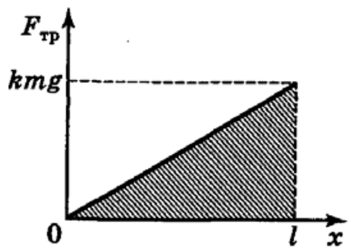


Рис. 36

Подставляя в (2) выражение v_1, Q, $A_{тр}$, получим

$$l = \frac{v_o^2}{6kg}.$$

Решение 47. Скорость движения столбика ртути пропорциональна мощности, подводимой к ртути: $v – N$. В свою очередь $N \sim \frac{\Delta T}{\Delta x}$, где ΔT – разность температуры между нагревателем и ртутью, выраженная в показаниях термометра, т. е.

$$\Delta x \sim (t_x - t)\,,$$

где t – текущее показание термометра.

По условию задачи разность температур остается приблизительно постоянной. Поэтому $v \sim \frac{1}{\Delta x}$. Для нахождения искомого времени построим график в координатах $\Delta x, \frac{1}{v}$, где Δx – разница между 30 °С и температурой ртути (рис. 37), а v – скорость движения вершины столбика ртути, выраженное в град/с.

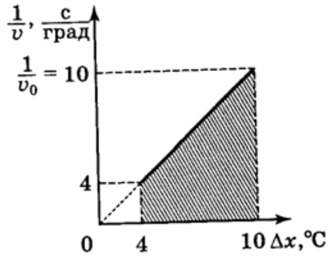


Рис. 37

В принятых обозначениях площадь под графиком есть время. Таким образом, искомое время τ численно равно заштрихованной площади на графике и составляет $\tau = 42$ с.

Решение 48. Введем обозначения резисторов и покажем направления токов на схеме (рис. 38). Идеальный амперметр A_1 «закорачивает» точки A и B, поэтому сопротивление всей цепи (между точками C и D) равно

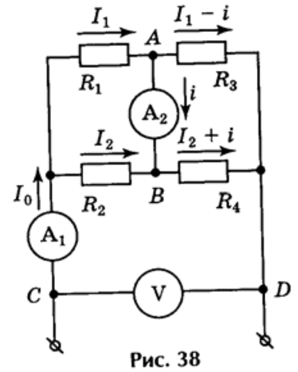


Рис. 38

$$R_{AB} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}.$$

Тогда сила тока, текущего через амперметр A_1, равна

$$I_o = \frac{U(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_1R_2R_3 + R_2R_3R_4 + R_3R_4R_1 + R_4R_1R_2}. \quad (1)$$

Значение выражения $\sum\prod_R = R_1R_2R_3 + R_2R_3R_4 + R_3R_4R_1 + R_4R_1R_2$ не зависит от порядка включения резисторов в цепь и всегда равна 50 Ом^3.

Теперь определим силу тока I_o, используя показание амперметра A_2. Из приведенной схемы следует

$$\left.\begin{aligned} &I_1R_1 = I_2R_2, \\ &(I_1 - i)R_3 = (I_2 + i)R_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_1 = i\frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2R_3 - R_1R_4},\ I_2 = i\frac{R_1(R_3+R_4)}{R_2R_3 - R_1R_4},$$

тогда

$$I_o = I_1 + I_2 = i\frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_2R_3 - R_1R_4}. \quad (2)$$

Приравнивая (1) и (2), получаем

$$R_2R_3 - R_1R_4 = \frac{i\sum\prod_R}{U} 10 \text{ Ом}^2. \ (3)$$

Последнее условие будет выполнено, если:

1) R_2 = 3 Ом, R_3 = 4 Ом, R_1 = 1 Ом, R_4 = 2 Ом. Тогда сопротивление цепи $R_{CD} = \frac{25}{12}$ Ом и показание амперметра A_1: I_{o1} = 4,8 А;

2) R_2 = 4 Ом, R_3 = 3 Ом, R_1 = 1 Ом, R_4 = 2 Ом. Тогда сопротивление цепи $R_{CD} = 2$ Ом и показание амперметра A_1: I_{o2} = 5 А.

Другие перестановки сопротивлений, удовлетворяющие условию (3), приводят к тем же результатам.

Итак, в зависимости от порядка включения резисторов в цепь показания амперметра A_1:

I_{o1} = 4,8 А или I_{o2} = 5 А