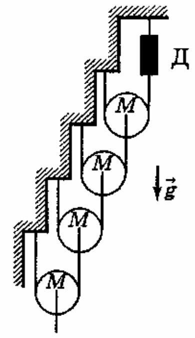
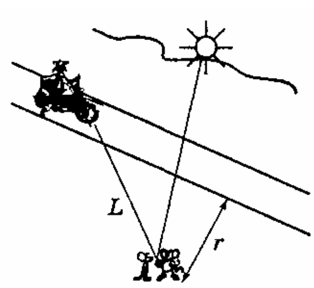
ЗОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА
9 КЛАСС. 1999 г.
Условия задач.

58. Из легких нитей и одинаковых блоков массой M каждый собрана полу бесконечная система (рис. 38.). Найдите силу F, которую показывает динамометр Д.

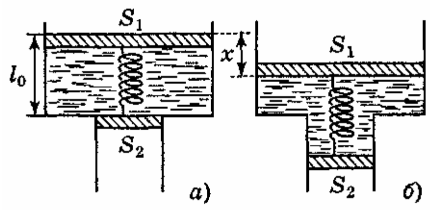


59. Только взошло Солнце. По ровной дороге на велосипеде едет со скоростью v_0 кот Леопольд. А в это время на расстоянии r от дороги и L от кота два озорных мышонка пытаются при помощи осколка зеркальца попасть «солнечным зайчиком» Леопольду прямо в глаз (рис.). Найдите, с какой угловой скоростью ω мышата должны поворачивать зеркальце, чтобы слепить кота.

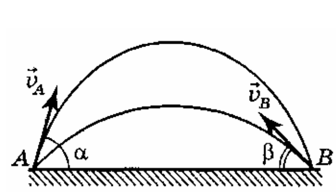


Примечание. Угловая скорость $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$, где $\Delta\varphi$ – угол поворота зеркала за малое время Δt.

60. В вертикально расположенных цилиндрах, площади сечений которых S_1 и S_2, находятся два невесомых поршня, соединенных невесомой пружиной жесткостью k. Пространство между поршнями заполнено водой. Нижний поршень (площадью S_2) в начальном состоянии поддерживается так, что пружина не напряжена, ее длина при этом равна l_0 (рис. *а*). Затем поршень площадью S_2 отпускают, и оба поршня опускаются (рис. *б*). На какое расстояние x сместится поршень площадью S_1? Изобразите графически зависимость x от жесткости k пружины. Оба цилиндра сообщаются с атмосферой.

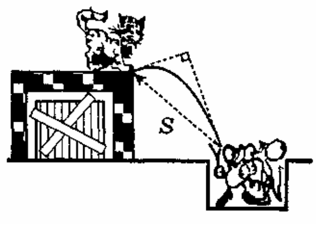


61. Из точек A и B, находящихся на одной горизонтальной прямой, одновременно бросили два камня с одинаковыми по модулю скоростями v_0 = 20 м/с. Один из них полетел по навесной траектории, а другой по настильной и каждый упал в точку старта другого камня. Известно, что угол бросания α камня из точки A составляет 75° (рис.). Через какое время после бросания расстояние между камнями станет минимальным? Чему равно это расстояние? Укажите на рисунке положения камней в этот момент.



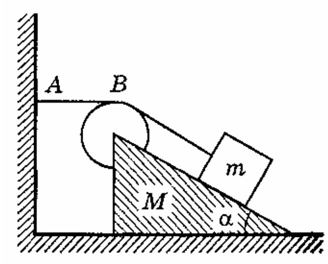
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА
9 класс. 1999 г.
Условия задач.

62. Кот Леопольд сидел у края крыши. Два озорных мышонка выстрелили в него камнем из рогатки. Камень, описав дугу, упал у ног кота (рис.) через время τ = 1 с. На каком расстоянии S от мышей находился кот Леопольд, если векторы скоростей камня в момент выстрела и в момент падения были

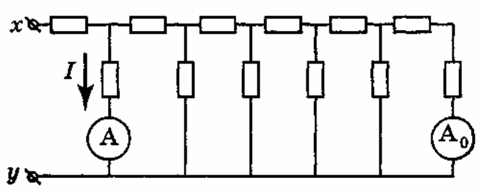


взаимно перпендикулярны?

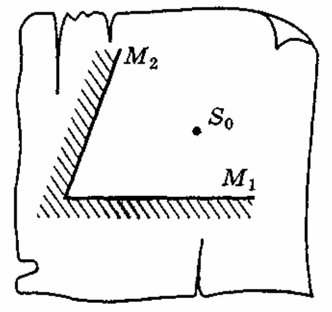
63. На гладком горизонтальном полу находится клин массой M с углом наклона α при основании (рис.). На поверхности клина расположен брусок массой m, привязанный легкой нитью к стене. Нить перекинута через невесомый блок, укрепленный на вершине клина. Отрезок нити AB параллелен горизонтальной поверхности пола. Вначале систему удерживают, а затем отпускают, и брусок начинает скользить по наклонной поверхности клина. Силы трения отсутствуют. 1. Найдите ускорение клина в этом случае. 2. Полагая α заданным, найдите, при каком отношении масс клина и бруска такое скольжение возможно.



64. На рисунке изображена электрическая цепь, состоящая из шести одинаковых звеньев. Все резисторы в цепи одинаковы и имеют сопротивление r. В первое и последнее звенья цепи включены амперметры А и A_o. На входные клеммы x и y цепи подано постоянное напряжение U_{xy}, при этом амперметр А показывает ток $I = 8{,}9$ А. 1. Какой ток I_o показывает амперметр A_o 2. Определите напряжение U_{xy}, поданное на входные клеммы цепи при условии $r = 1$ Ом. 3. Определите для этого случая электрическое сопротивление R_{xy} между клеммами x и y.



65. В архиве Снеллиуса нашли чертеж, на котором были изображены два плоских зеркала M_1 и M_2, образующих двугранный угол в 70°, и точечный источник света S_o (рис.). От времени чернила выцвели, и невозможно было разглядеть, сколько изображений источника S_o давала такая система зеркал. Попробуйте восстановить все изображения источника S_o. Сколько изображений источника S_o можно было увидеть в такой системе зеркал?



Решения задач.

Решение 58. Заметим, что если удалить крайний правый блок, получится система, эквивалентная исходной. Иными словами $F_1 = F$ (рис. 47). Условие равновесия первого блока:

$$2F = Mg + F_1 = Mg + F\,.$$

Отсюда $F = Mg$.

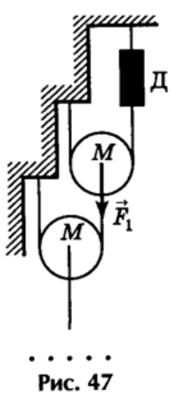


Рис. 47

Решение 59. Пусть за время Δt зеркальце повернулось на угол $\Delta\varphi$. Тогда луч света за это же время повернется на угол (рис. 48)

$$\Delta\alpha = 2\Delta\varphi,\ \Delta\alpha \approx \frac{(v_o\Delta t)\cos\alpha}{L}.$$

Здесь $\cos\alpha = \dfrac{r}{L}$.

Получим

$$\frac{(v_o\Delta t)_r}{L^2} = 2\Delta\varphi,$$

откуда $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{v_o r}{2L^2}$.

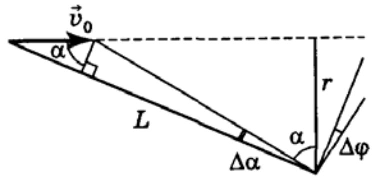


Рис. 48

Решение 60. Из условия равновесия поршней

$$p_o S_1 + T = pS_1,\ p_o S_2 + T = (p + \rho g l)S_2$$

находим силу натяжения пружины

$$T = \frac{\rho g l S_1 S_2}{S_1 - S_2},$$

здесь l – длина недеформированной пружины $T = l(l - l_o)$, откуда

$$l = \frac{k(S_1 - S_2)}{k(S_1 - S_2) - \rho g S_1 S_2} l_o.$$

Удлинение пружины

$$\Delta l = l - l_o = \frac{\rho g S_1 S_2}{k(S_1 - S_2) - \rho g S_1 S_2} l_o, \quad (1)$$

оно равно разности перемещений первого x_1 и второго x_2 поршней:

$$\Delta l = x_2 - x_1 = \frac{S_1}{S_2} x_1 - x_1 = x_1 \frac{S_1 - S_2}{S_2}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$x = \frac{\rho g S_1 S_2^2}{k(S_1 - S_2)^2 - \rho g S_1 S_2 (S_1 - S_2)} l_o. \quad (3)$$

Это и есть зависимость $x(k)$.

Жесткость пружины, при которой верхний поршень «ляжет» на стык цилиндров, найдем из условия $x_o = l_o$:

$$k_o = \frac{\rho g S_1^2 S_2}{(S_1 - S_2)^2}.$$

Если в (3) знаменатель устремить к нулю, то это произойдет при $k \to k_1$, где

$k_1 = \dfrac{\rho g S_1 S_2}{S_1 - S_2}$ – вертикальная асимптота.

Строим зависимость $x(k)$; это кривая 1 на рис. 49; зависимость $x_2(k)$ показана на кривой 2.

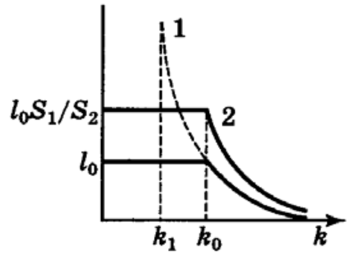


Рис. 49

Решение 61. Рассмотрим полет камня, брошенного из точки A. В проекции на вертикальную ось

$$(v_o \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2} = 0,$$

откуда время полета

$$t = \frac{2v_o \sin\alpha}{g}.$$

Расстояние L между точками A и B равно

$$L = tv_o \cos\alpha = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{g} = 20 \text{ м}.$$

Поскольку для камня, брошенного из точки B, можно аналогичным образом написать

$$L = \frac{v_o^2 \sin 2\beta}{g},$$

то мы получим $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$, и, так как по условию $\alpha \neq \beta$, то $2\alpha = \pi - 2\beta$, т. е.

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Далее удобно перейти в систему отсчета, в которой камни движутся равномерно.

В качестве тела отсчета выберем камень, вылетевший из точки A. Так как $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, $v_1 = v_2 = v_o$, то вектор $\vec{v}_{отн}$ есть диагональ квадрата, построенного на векторах $\vec{v}_2$ и $-\vec{v}_1$. Поэтому $v_{отн} = \sqrt{2}v_o$. Из рис. 50 видно, что AC – кратчайшее расстояние между камнями. Найдем его: $\delta = \alpha - 45^o = 30^o$ и, следовательно,

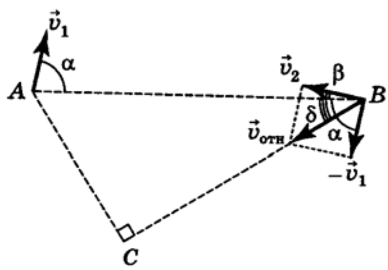


Рис. 50

$$AC = \frac{1}{2}L = 10 \text{ м}.$$

Время, через которое расстояние между камнями станет минимальным, равно

$$t_x = \frac{AC}{v_{отн} tg\delta} = \frac{10\sqrt{3}}{20\sqrt{2}} \approx 0{,}61 \text{ с}.$$

Положение камней можно найти параллельным переносом отрезка AC до тех пор, пока его начало и конец не окажутся лежащими на навесной и настильной траекториях камней (рис. 51), при этом $A^/C^/ = AC$.

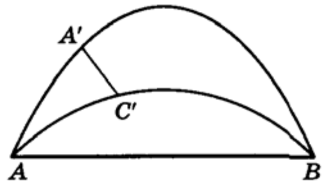


Рис. 51

Решение 62. При движении камня в поле тяготения

$$\vec{v}_\tau = \vec{v}_o + \vec{g}t, \quad (1)$$

где t – время от начала движения камня (рис. 52, а).

Вектор перемещения камня

$$\vec{S}(t) = \vec{v}_o t + \frac{\vec{g}t^2}{2} = \frac{2\vec{v}_o + \vec{g}t}{2}t = \frac{\vec{v}_o + (+\vec{g}t)}{2}t = \frac{\vec{v}_o + \vec{v}_t}{2}t.$$

Тогда для момента τ найдем перемещение камня

$$\left|\vec{S}(\tau)\right| = \left|\frac{\vec{v}_o + \vec{v}_k}{2}\right|\tau. \quad (2)$$

Из рис. 52, б видим, что в силу перпендикулярности векторов $\vec{v}_o$ и $\vec{v}_k$ (как диагонали прямоугольника)

$$|\vec{v}_o + \vec{v}_k| = |\vec{v}_k - \vec{v}_o| = g\tau. \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), находим

$$|\vec{S}| = \frac{g\tau^2}{2}, \; S \approx 5 \text{ м.}$$

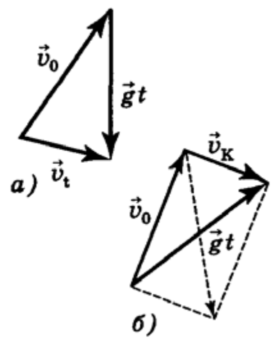


Рис. 52

Решение 63. 1. Силы, действующие на брусок и клин, показаны на рис. 53, причем $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_3| = T$. Обозначив ускорение клина через a_1. Запишем уравнения движения тел в системе координат xOy:

для клина по Ox с учетом равенства реакций опоры $|\vec{N}'| = |\vec{N}'|$:

$$T(1-\cos\alpha) + N\sin\alpha = Ma_1; \quad (1)$$

Для бруска по оси Ox:

$$T\cos\alpha - N\sin\alpha = ma_x; \quad (2)$$

Для бруска по оси Oy:

$$mg - T\sin\alpha - N\cos\alpha = ma_y. \quad (3)$$

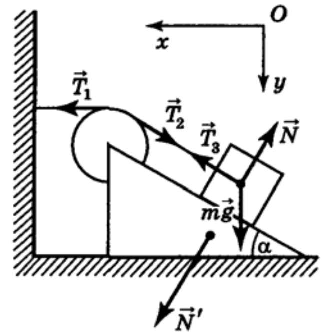


Рис. 53

Здесь a_x и a_y – проекции вектора ускорения бруска на координатные оси.

Связь между ускорением клина и ускорением бруска можно установить, используя кинематические соображения. Пусть клин сместится на l влево. Тогда брусок, движущийся по клину, сместится на l вдоль наклонной плоскости и одновременно на расстояние l влево вместе с клином. Отсюда получим:

$$a_x = a_1(1-\cos\alpha), \; a_y = a_1\sin\alpha.$$

Тогда система уравнений (1) – (3) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &T(1-\cos\alpha) + N\sin\alpha = Ma_1, \\ &T\cos\alpha - N\sin\alpha = ma_1(1-\cos\alpha), \\ &mg - T\sin\alpha - N\cos\alpha = ma_1\sin\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

откуда

$$a_1 = \frac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1-\cos\alpha)}.$$

2. Рассмотренное движение возможно, если $N > 0$. Находя N из уравнений (4), получим условие:

$$\frac{M}{m} > \frac{(1-\cos\alpha)^2}{\cos\alpha}.$$

Решение 64. 1. Последовательно рассмотрим все токи и напряжения на элементах цепи, начиная с последнего звена (рис. 54). Обозначим силу тока в последнем звене через I_0. Тогда напряжение на участке cd будет равно $2rI_0$, а сила

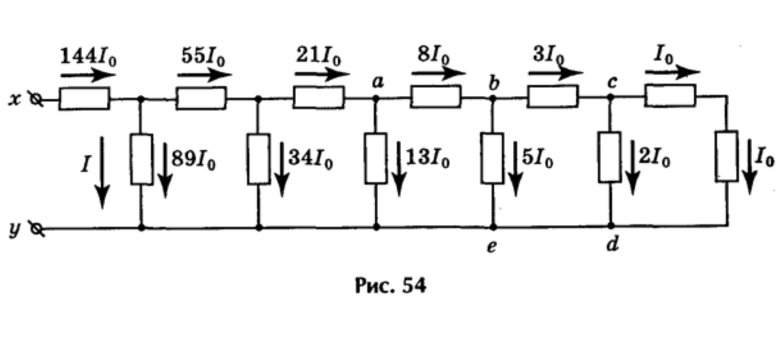


Рис. 54

тока на этом участке будет равна $2I_o$.

Следовательно, сила тока на участке bc равна $3I_o$, а напряжение на участке be равно $5rI_o$. Далее находим, что сила тока на участке be равна $5I_o$, а на участке ab – $8I_o$ и т. д. Рассуждая аналогично, получаем $I = 89I_o$, а следовательно, $I_o = 0{,}1$ А.

2. Находим напряжение U_{xy} на входе цепочки:

$$U_{xy} = (144 + 89)rI_o = 23{,}3 \text{ В}.$$

3. Сопротивление R_{xy} между клеммами x и y равно

$$R_{xy} = \frac{U_{xy}}{144 I_o} = \frac{23{,}3}{14{,}4} = 1{,}62 \text{ Ом}.$$

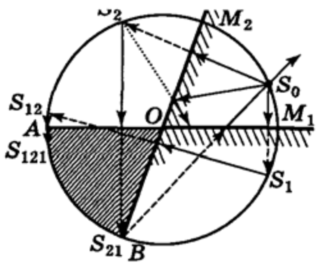


Рис. 55

Решение 65. В плоском зеркале изображение точечного источника расположено симметрично этому источнику относительно плоскости зеркала. Если получившееся изображение окажется с отражающей стороны другого зеркала – оно дает еще одно изображение и т. д. В данном случае все изображения лежат на окружности радиуса R, проведенного из точки O пересечения плоскостей зеркал через S_o (рис. 55):

S_1 – изображение точечного источника S_o в зеркале M_1;

S_{12} – изображение мнимого источника S_1 в зеркале M_2;

S_{121} – изображение источника S_{12} в зеркале M_1.

Источник S_{121} не может дать изображение, так как он лежит с обратной (не отражающей) стороны зеркала M_2 (и, разумеется, M_1);

S_2 – мнимое изображение точечного источника S_o в зеркале M_2;

S_{21} – изображение источника S_2 в зеркале M_1.

Мы видим, что источник S_{21} оказался с обратной (не отражающей) стороны зеркала M_2, поэтому он тоже не может дать изображений.

Следовательно, в зеркалах можно увидеть 5 изображений источника S_o. Вообще говоря, любое изображение, оказавшееся в секторе AOB (он заштрихован), не может более отразиться в зеркалах M_1 и M_2.