

**XXXIII Всероссийская олимпиада по физике 2002 г.
Теоретический тур.**

9 класс

Задача 1. Космический зонд.

Космический зонд "Шумейкер" на некоторое время должен стать спутником астероида Эрос. По расчетам, он будет обращаться вокруг астероида на высоте, составляющей $n = 1/15$ радиуса Эроса, с периодом $T = 4,5$ часа. Определите предполагаемую среднюю плотность астероида ρ . Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$.

Задача 2. Жук на палочке.

У вертикальной стенки стоит палочка AB длиной L (рис. 1). На ее нижнем конце B сидит жук. В тот момент, когда конец B начали двигать вправо по полу с постоянной скоростью v , жук пополз по палочке с постоянной скоростью u относительно нее. На какую максимальную высоту над полом поднимется жук за время своего движения по палочке, если ее верхний конец не отрывается от стенки?

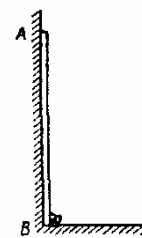


Рис. 1

Задача 3. Две проволоки.

Две тонкие медные проволоки одинаковой длины соединили параллельно и подключили последовательно с лампочкой к источнику постоянного напряжения. Первая проволока нагрелась на 16°C выше комнатной температуры, а вторая – в $\alpha = 2$ раза меньше. На сколько градусов выше комнатной температуры нагреются проволоки, если их параллельное подключение заменить на последовательное? Сопротивление каждой из проволок много меньше сопротивления лампочки и источника, зависимость сопротивления проволок от температуры не учитывать.

Задача 4. Нелинейный элемент.

Электрическая цепь (рис. 2) состоит из резистора R и нелинейного элемента X , включенных последовательно. Вольтамперные характеристики ($ВАХ$) элементов R и X известны (рис. 3). На участке $0 < U < U_0$ $ВАХ$ обоих элементов совпадают. На вход цепи подается некоторое напряжение V .

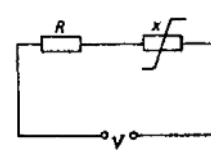


Рис. 2

1. Определите, какая доля η_1 теплоты, выделяющейся в цепи, приходится на нелинейный элемент в случаях $V < 2U_0$ и $V = 4U_0$.

2. Включим последовательно в цепь еще один элемент X . Изобразите $ВАХ$ двух последовательно включенных нелинейных элементов. Определите, какая доля η_2 теплоты, выделяющейся в цепи, приходится на оба нелинейных элемента в случае $V = 4U_0$.

3. А теперь подключим второй элемент X параллельно первому. Изобразите $ВАХ$ двух параллельно включенных нелинейных элементов. Определите, какая доля η_3 теплоты, выделяющейся в цепи, приходится на оба нелинейных элемента в случае $V = 4U_0$.

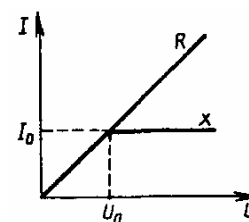


Рис. 3

Решение задач.

Решение 1. Скорость спутника на рассчитываемой орбите

$$v = 2\pi(1+n)\frac{R}{T},$$

где R – радиус Эроса. Ускорение спутника

$$a = \frac{v^2}{(n+1)R} = \frac{GM}{(1+n)^2 R^2},$$

где M – масса Эроса.

Подставив

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3,$$

получим

$$\rho = \frac{3\pi(1+n)^3}{GT^2} \approx 653 \text{ кг/м}^3.$$

Решение 2. Пусть G – место нахождения жука на палочке, M – середина палочки, $GK = h$ – высота жука над полом, $ON = H$ – расстояние от угла O до палочки (рис. 10), t – время, прошедшее с начала движения жука, тогда:

$$OB = vt, BG = ut, AM = OM = L/2.$$

Треугольник ONB и GKB подобны, так как они прямоугольные и угол β общий, поэтому

$$\frac{GK}{ON} = \frac{BG}{OB}, \frac{h}{H} = \frac{ut}{vt} = \frac{u}{v},$$

откуда $h = H \frac{u}{v}$.

В прямоугольном треугольнике OMN катет $ON = H \leq OM = L/2$ (OM – гипотенуза), причем равенство достигается при $\beta = 45^\circ$. Следовательно

$$h_{\max} = H_{\max} \frac{u}{v} = \frac{L}{2} \frac{u}{v}.$$

Этот результат верен, если за время $t_{\max} = \frac{L \cos 45^\circ}{v}$ жук не успевает доползти до верхнего конца палочки, то есть когда $ut_{\max} < L$, что эквивалентно неравенству $u \leq v\sqrt{2}$. В противном случае высота h будет максимальной к моменту времени $t = \frac{L}{v}$ достижения жуком точки A :

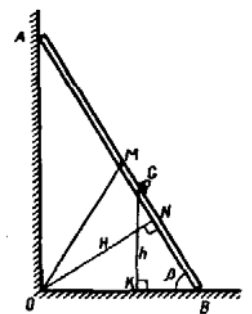


Рис. 10

$$h_{\max} = \sqrt{L^2 - (vt)^2} = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}}.$$

Решение 3. Пусть r_1 и r_2 – радиусы проволок, l – длина, тогда сопротивление проволок

$$R_1 = \rho \frac{l}{\pi r_1^2}, R_2 = \rho \frac{l}{\pi r_2^2}.$$

Мощности электрического тока, выделяющиеся на каждой из проволок при параллельном соединении, равны:

$$N_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{U^2 \pi r_1^2}{\rho l}, \quad (1)$$

$$N_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{U^2 \pi r_2^2}{\rho l}, \quad (2)$$

где U – напряжение на проволоках. В установившемся режиме, когда первая проволока нагрелась на Δt_1 , а вторая – на Δt_2 , вся мощность электрического тока уходит через боковые поверхности проволок на нагревание окружающей среды:

$$N_1 = k \cdot 2\pi r_1 l \Delta t_1, \quad (3)$$

$$N_2 = k \cdot 2\pi r_2 l \Delta t_2, \quad (4)$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Приравняв (1) к (3) и (2) к (4), получим:

$$U^2 r_1 = 2k \rho l^2 \Delta t_1, U^2 r_2 = 2k \rho l^2 \Delta t_2,$$

откуда $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \alpha.$

Следовательно, отношение сил токов, текущих через проволоки при параллельном соединении, таково

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U/R_1}{U/R_2} = \frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \alpha^2.$$

Поскольку сопротивление каждой из проволок много меньше сопротивления лампочки и источника, то при замене параллельного соединения на последовательное, общая сила тока в цепи не изменится:

$$I = I_1 + I_2 = (1 + \alpha^2) I_2.$$

Нагрев проволок (от комнатной температуры) в обоих случаях прямо пропорционален выделяющейся на них мощности электрического тока:

$$\frac{\Delta t'_1}{\Delta t_1} = \frac{N'_1}{N_1} = \frac{I^2 R_1}{I_1^2 R_1} = \left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2}\right)^2, \quad \frac{\Delta t'_2}{\Delta t_2} = \frac{N'_2}{N_2} = \frac{I^2 R_2}{I_2^2 R_2} = (\alpha^2 + 1)^2,$$

где штрихованные переменные относятся к последовательному подключению проволок. Отсюда получаем:

$$\Delta t_1' = \left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2} \right)^2 \Delta t_1 = 25 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad \Delta t_2' = (\alpha^2 + 1)^2 \frac{\Delta t_2}{\alpha} = 200 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Решение 4. 1. Сопротивление резистора $R = U_o / I_o$, напряжение на нелинейном элементе $U = V - RI = V - U_o I / I_o$.

а) При $V \leq 2U_o$. Нелинейный элемент ведет себя как резистор R . Следовательно, выделяющееся в цепи количество теплоты поровну распределяется между резистором и нелинейным элементом, то есть $\eta_{1a} = 0,5$.

б) При $V \geq 2U_o$ сила тока I достигает своего максимального значения I_o , а напряжение $U = V - U_o$; тогда

$$\eta_{1b} = \frac{P_x}{P_x + P_R} = \frac{UI}{UI + RI^2} = \frac{(V - U_o)I_o}{(V - U_o)I_o + U_o I_o} = 1 - \frac{U_o}{V} = 0,75.$$

2. ВАХ двух последовательно соединенных нелинейных элементов получается сложением напряжений для каждого фиксированного значения силы тока (рис. 11). Суммарное напряжение на нелинейных элементах $U = V - RI = V - U_o I / I_o$. Пусть при $V = 4U_o$ сила тока $I = I_o$, тогда $U = V - U_o = 3U_o > 2U_o$, значит, наше предположение о силе тока верно, поэтому

$$\eta_2 = \frac{UI}{UI + RI^2} = \frac{(V - U_o)I_o}{(V - U_o)I_o + U_o I_o} = 1 - \frac{U_o}{V} = 0,75.$$

Таким образом, в режиме насыщения доля количества теплоты, выделяющегося на нелинейных элементах, не зависит от их числа.

3. ВАХ двух параллельно соединенных нелинейных элементов получается сложением сил токов для каждого фиксированного значения напряжения (рис. 12). Напряжение на каждом нелинейном элементе $U = V - RI = V - U_o I / I_o$. Пусть при $V = 4U_o$ сила тока $I = 2I_o$, тогда $U = V - U_o = 2U_o > U_o$, значит, наше предположение о силе тока верно, поэтому

$$\eta_3 = \frac{UI}{UI + RI^2} = \frac{4U_o I_o}{4U_o I_o + 4U_o I_o} = 0,5.$$

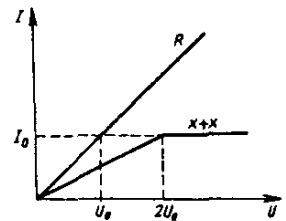


Рис. 11

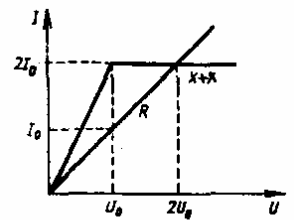


Рис. 12