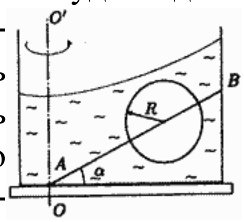
XXXVII Всероссийская олимпиада по физике 2003 г.
Теоретический тур.

9 класс.

Задача 1. Удаляющийся камень. Мальчик бросил камень под некоторым углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, при каких значениях угла бросания α камень все время будет удаляться от мальчика.

Задача 2. Поплавок в центрифуге. На горизонтальной платформе стоит сосуд с водой. В сосуде закреплен тонкий стержень AB, наклоненный к горизонту под углом α (см. рис). Шар радиусом R может скользить без трения вдоль стержня, проходящего через его центр. Плотность шара ρ_o, плотность воды ρ ($\rho_o < \rho$). При вращении системы с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси OO', проходящей через нижний конец A стержня, центр шара устанавливается на расстоянии l от этого конца.



1. С какой силой шар действует на стержень?
2. Найдите угловую скорость вращения платформы.
3. При какой минимальной угловой скорости вращения шар "утонет" и окажется на дне сосуда?

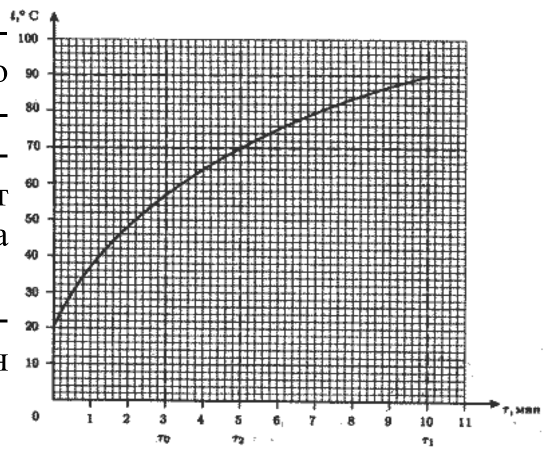
Воды достаточно, так что шар всегда полностью погружен в воду.

Задача 3. Байкальские морозы. На поверхности озера Байкал зимой намерзает толстый слой льда. Предположим, что где-то в декабре толщина льда составляет x = 80 см. Температура воздуха t = –40°С. С какой скоростью v (в мм/час) увеличивается в этот период толщина слоя льда?

Для льда: плотность $r_л$ = 0,92 г/см^3, удельная теплота плавления $\lambda = 3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг, коэффициент теплопроводности k = 2,2 Вт/(м·°С).

Примечание. Количество теплоты, проходящее в единицу времени через слой вещества площадью S и толщиной h при разнице температур Δt между поверхностями, определяется соотношением $q = kS\Delta t/h$.

Задача 4. Нагревание и остывание проволоки. Цилиндрический медный проводник площадью поперечного сечения S = 0,1 см^2 подключают к источнику постоянного тока. Температура проводника начинает увеличиваться. Как видно из графика зависимости температуры t от времени t (см. рис), через время t_1 = 10 мин температура проводника становится равной t_1 = 90 °С.



1. За какое время t_0 температура проводника достигла бы значения t_1, если бы проводник был окружен теплонепроницаемой оболочкой?
2. Найдите силу тока I в проводнике.

3. Предположим, что по истечении времени t_2 = 5 мин проводник был отключен от источника тока и стал остывать. Определите, за какое приблизительно время Δt температура проводника изменится от 70 °С до 65°С?

Для меди: удельная теплоемкость c = 390 Дж/(кг·С), удельное сопротивление $r_м$ = $1{,}75\cdot10^{-8}$ Ом·м, плотность $\rho = 8{,}9\cdot10^{-3}$ кг/м^3.

Решение задач.

Решение 1. Движение камня описывается следующими соотношениями (рис. 10):

$$x = v_o t\cos\alpha,\ y = v_o t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2},\ v_x = v_o\cos\alpha,\ v_y = v_o\sin\alpha - gt\,.$$

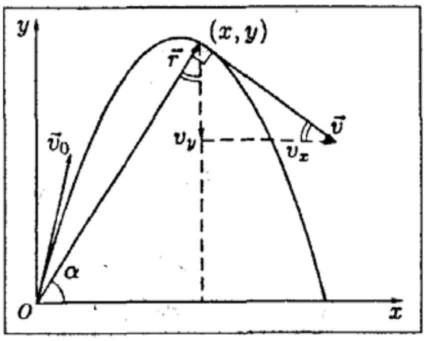


Рис. 10

Камень удаляется на максимальное расстояние от места бросания, когда вектор скорости будет перпендикулярен радиусу-вектору $\vec r$. При этом должно быть выполнено соотношение:

$$\frac{y}{x} = -\frac{v_x}{v_y}\,.$$

Подставляя сюда выражения для x, y, v_x, v_y, получим квадратное уравнение относительно времени t:

$$t^2 - \frac{3v_o\sin\alpha}{g}t + \frac{2v_o^2}{g^2} = 0\,.$$

Если дискриминант этого уравнения отрицателен, то не существует такого момента времени t, когда векторы $\vec v$ и $\vec r$ перпендикулярны друг другу, а, следовательно, брошенный камень будет все время удаляться от места бросания. Отсюда

$$\left(\frac{3v_o\sin\alpha}{g}\right)^2 < 4\left(\frac{2v_o^2}{g^2}\right),$$

следовательно

$$\sin\alpha < \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0{,}94,\ \alpha < 70{,}5^o\,.$$

Решение 2. Пусть объем шара равен V, его масса $\rho_o V$. На шар действуют сила тяжести $\rho_o Vg$, сила реакции N стержня, сила Архимеда F_A (рис. 11). Ускорение шара направлено к оси вращения и равно $a = \omega^2 l\cos\alpha$. Запишем уравнения движения шара в проекциях на оси x и y:

$$F_{Ax} - N\sin\alpha = \rho_o Va,\ F_{Ay} - N\cos\alpha - \rho_o Vg = 0\,.$$

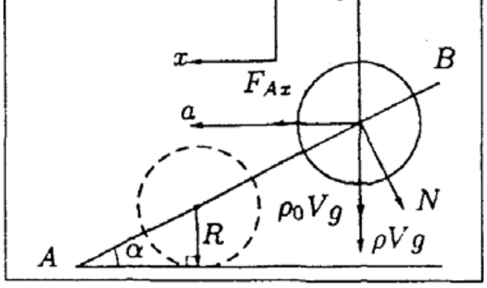


Рис. 11

Мысленно удалим шар и заполним объем, который он занимал, водой. Водяной шар должен находиться в равновесии внутри жидкости и вращаться вместе с ней. Сила Архимеда F_A, действующая на водяной шар, и ее проекции на оси x и y остаются прежними, а сила, действующая на водяной шар со стороны стержня, равна нулю. Запишем для водяного шара уравнения движения в проекциях на оси x и y:

$$F_{Ax} = \rho_o Va,\ F_{Ay} - \rho_o Vg = 0.$$

Из записанных уравнений находим силу N и угловую скорость ω:

$$N = \frac{(\rho - \rho_o)Vg}{\cos\alpha},\ \omega = \sqrt{\frac{g\sin\alpha}{l\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{gtg\alpha}{l\cos\alpha}}.$$

Шар действует на стержень с такой же силой N.

Из анализа зависимости между ω и l следует, что с увеличением ω расстояние l уменьшается. Шар «утонет» при угловой скорости, которой соответствует длина $l = R/\sin\alpha$. При этом:

$$\omega_{\min} = tg\alpha\sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Решение 3. Количество теплоты, передаваемое воздуху через лед за малое время Δτ, равно

$$\Delta Q = k\frac{(t_o - t)}{x}S\Delta\tau,$$

где S – выделенная площадь поверхности льда, t_o = 0 °С – температура воды подо льдом.

При замерзании слоя Δx (рис. 12) выделяется количество теплоты

$$\Delta Q_1 = S\Delta x\rho_л\lambda.$$

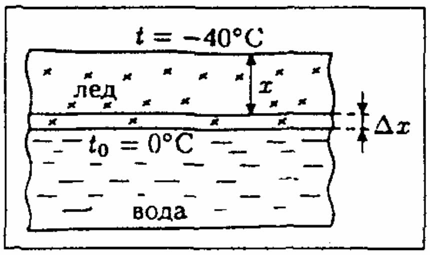


Рис. 12

Запишем приближенное уравнение теплового баланса:

$$\Delta Q = \Delta Q_1,$$

или

$$k\frac{(t_o - t)}{x}S\Delta\tau = S\Delta x\rho_л\lambda.$$

Следовательно,

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta\tau} = k\frac{(t_o - t)}{x}\frac{1}{\rho_л\lambda} = 3,6\cdot10^{-7}\ \text{м/с} \approx 1,3\ \text{мм/ч}.$$

Решение 4. 1. Скорость нагревания теплоизолированного проводника можно найти по начальному участку графика $t(\tau)$, когда потерями теплоты можно пренебречь. Температура теплоизолированного проводника изменялась бы линейно со временем. Значение $t = t_1$ = 90 °С было бы достигнуто через время $\tau_o \approx$ 3 мин. 2. Для начального участка графика из закона Джоуля – Ленца имеем:

$$\Delta Q = I^2R\Delta\tau = C\Delta t = Ctg\alpha_1\cdot\Delta\tau,$$

где $tg\alpha_1 = \Delta t / \Delta\tau \approx 0{,}4\ {}^oC/c$ – наклон начального участка графика, $C = cLS\rho$ – теплоемкость проволоки, $R = \rho_м \dfrac{L}{S}$ – ее сопротивление, а L – длина.

Из этих соотношений получим

$$I = \sqrt{\frac{C}{R} tg\alpha_1} = S\sqrt{\frac{c\rho tg\alpha_1}{\rho_м}} \approx 89 \text{ А}.$$

3. Из графика (рис. 13) находим наклон касательной при $\tau = \tau_2 = 5$ мин:

$$tg\alpha_2 \approx 0{,}09\ {}^oC/c \approx 0{,}23 tg\alpha_1.$$

Это означает, что только 23 % поступающей энергии идет на нагревание проводника, остальные 77 % энергии уходят наружу. Отсюда следует, что тангенс угла α_3 наклона начального участка кривой остывания при $\tau = \tau_2$ был бы равен

$$0{,}77 tg\alpha_1 \approx 0{,}3\ {}^oC/c.$$

На малом участке кривую остывания можно заменить касательной:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{tg\alpha_3} \approx 16\ c.$$

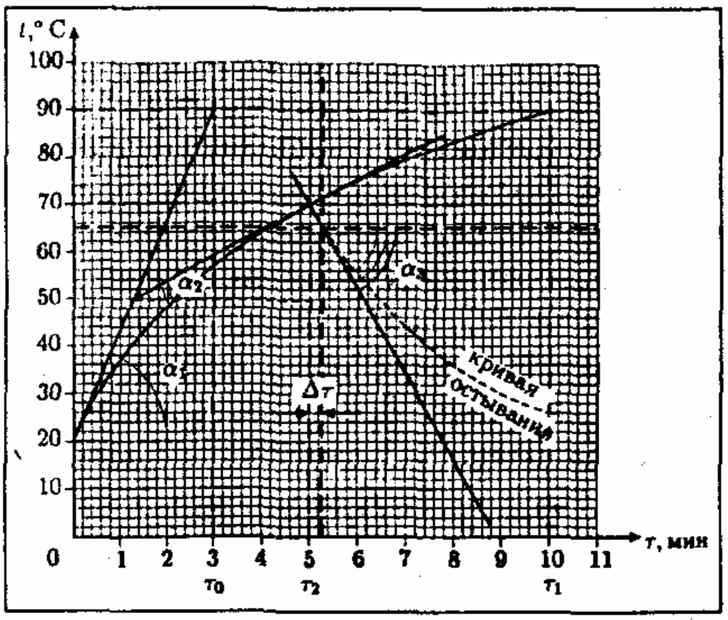


Рис. 13