XXXVIII Всероссийская олимпиада школьников по физике (2004 г.)
Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Катапульта. При осаде древней крепости осажденные вели стрельбу по наступавшему противнику с помощью катапульт из-за крепостной стены высотой h = 20,4 м. Начальная скорость снарядов v_o = 25 м/с. На каком максимальном расстоянии $S_{\max}$ от стены находились цели, которых могли достигать снаряды катапульт? Сравните это расстояние с максимальной дальностью $L_{\max}$ снаряда катапульты. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Задача 2. Санки с цилиндром. Тонкостенный цилиндр массой m насажен с помощью легких спиц на горизонтальную ось O, закрепленную на санках (рис. 1), и может вращаться вокруг нее без трения. Масса цилиндра вместе с санками равна M. Мальчик тянет санки в горизонтальном направлении с постоянной силой F за легкий трос, намотанный на цилиндр. В результате за некоторое время санки из состояния покоя переместились по гладкой горизонтальной дороге на расстояние S.

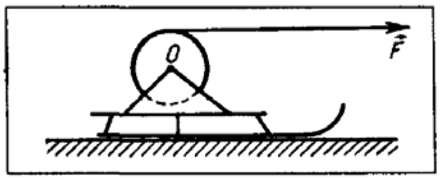


Рис. 1

1. Какой скорости v_1, достигли бы санки, пройдя путь S, если бы цилиндр был заторможен в оси и не мог вращаться?

2. Какой скорости v_2 достигли бы санки, пройдя путь S, при незаторможенном цилиндре?

3. Какую работу совершил бы мальчик, перемещая санки, при незаторможенном цилиндре?

Задача 3. Модель турбины. Любознательный ученик 9 класса соорудил на даче модель водяной турбины (рис. 2). Вода из широкой бочки вытекала через небольшое отверстие площадью S = 1 см^2 у дна и попадала на лопасти турбинки. С помощью нити, намотанной на тонкий вал турбины и перекинутой через блок, устройство могло поднимать вверх груз массой m = 100 г с некоторой скоростью.

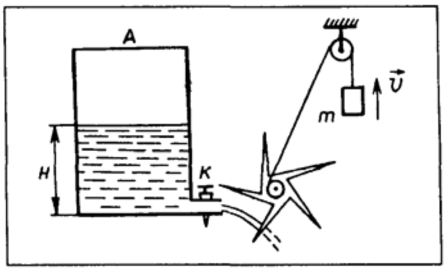


Рис. 2

1. Определите коэффициент полезного действия модели водяной турбины, принимая высоту столба воды в бочке H = 0,2 м, скорость груза v_1 = 2 см/с.

2. Выполнив первый эксперимент, ученик перекрыл кран K и герметичной пробкой закрыл отверстие A в крышке бочки. Когда он через некоторое время вернулся, бочка сильно нагрелась на солнце. Открыв кран K (при закрытом отверстии A), ученик с удивлением обнаружил, что его механизм работает более активно, и теперь тот же груз поднимается со скоростью v_2 = 5 см/с. Предполагая, что КПД устройства остался неизменным, а уровень воды в бочке по-прежнему H = 0,2 м, определите, насколько изменилось давление газа в бочке. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Задача 4. Двухпроводная линия. В некоторой точке двухпроводной телефонной линии неизвестной длины L произошло повреждение, в результате которого между проводами появилось сопротивление утечки R_x (рис. 3). К обоим концам линии прибыли операторы, имеющие в своем распоряжении приборы для измерения сопротивлений (омметры). Они замерили сопротивления линии при разомкнутых (R_1, и R_2) и закороченных (r_1 и r_2) противоположных концах линии и получили следующие значения: $R_1 = 4{,}0$ Ом, $R_2 = 8{,}0$ Ом, $r_1 = 3{,}5$ Ом, $r_2 = ?$ Из-за нарушения мобильной связи оператор на правом конце не успел передать оператору на левом конце линии, который должен был выполнить необходимые расчеты, значение сопротивления r_2. Помогите оператору на левом конце линии определить сопротивление утечки R_x, расстояние l до места повреждения, общую длину линии L, а также восстановить утраченное из-за плохой связи между операторами значение сопротивления r_2. Погонное сопротивление, то есть сопротивление единицы длины каждого проводника линии, $\rho = 5{,}0 \cdot 10^{-4}$ Ом·м.

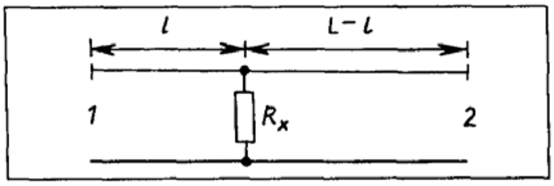
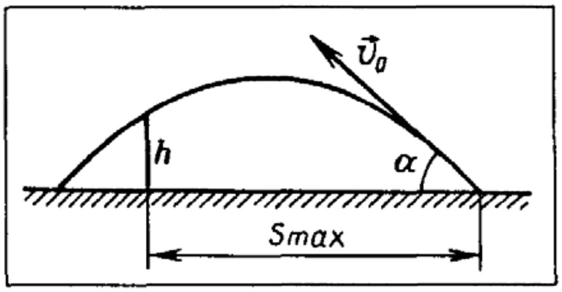


Рис. 3

Решение задач.

Решение 1. Максимальную дальность полета S_{max} обеспечивает единственная траектория, которая происходит над самой вершиной стены. В конечной точке скорость снаряда такая же, как и при вылете из катапульты. Пользуясь обратимостью движения, можно рассмотреть траекторию попятного движения, выходящую из цели и проходящую через вершину стены. Уравнения движения снаряда по горизонтальной и вертикальной оси имеют вид:



$$S = v_o t \cos\alpha,\ h = v_o t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключив из этих уравнений время t, выразим

$$h = S tg\alpha - \frac{gS^2}{2v_o^2}(1 + tg^2\alpha).$$

Получилось квадратное уравнение относительно tgα (при заданных значениях h и S). Максимальной дальности полета $S = S_{max}$ соответствует совпадение корней этого уравнения, так как максимальной дальности соответствует единственная траектория. Приравняв нулю дискриминант квадратного уравнения, найдем

$$S_{max} = \frac{v_o^2}{g}\sqrt{1 - \frac{2gh}{v_o^2}} \approx 38{,}2 \text{ м.}$$

Максимальная дальность полета снаряда катапульты соответствует случаю $h = 0$:

$$L_{max} = \frac{v_o^2}{g} \approx 63{,}7 \text{ м.}$$

Решение 2. В обоих случаях ускорение санок $a = \frac{F}{m} = const$, поэтому их скорость

$$v_1 = v_2 = v\sqrt{2aS} = \sqrt{\frac{2FS}{M}}\ .$$

Покажем, что для любой системы материальных точек массами m, кинетическая энергия системы

$$K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2\ ,$$

где $m = \sum m_i$ – масса системы, v_c – скорость ее центра масс, v_i – скорость i-той материальной точки в системе отсчета, движущейся поступательно со скоростью центра масс. Пусть v_i –скорости точек в неподвижной системе отсчета, тогда кинетическая энергия

$$K = \frac{1}{2}\sum m_i V_c^2 = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{V}_c + \vec{v}_i)^2 = \frac{1}{2}\sum m_i V_c^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 + \vec{V}_c\sum m_i\vec{v}_i =$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i V_c^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2,$$

так как в системе центра масс импульс системы $\sum m_i\vec{v}_i = 0$.

Запишем закон изменения механической энергии:

$$A = M\frac{V^2}{2} + m\frac{v^2}{2}\ ,$$

где v – скорость точек цилиндра в системе отсчета, движущейся поступательно со скоростью санок, откуда

$$\Delta A = F\Delta x = \frac{1}{2}M\,2V\Delta V + \frac{1}{2}m2v\Delta v\ .$$

За время Δt перемещение мальчика $\Delta x = V\Delta t + v\Delta t$.

Запишем закон изменения импульса для санок с цилиндром: $F\Delta t = M\Delta V$.

Из последних трех уравнений находим: $M\Delta V = m\Delta v$. В задаче $\Delta V = V, \Delta v = v$, следовательно, $v = V\dfrac{M}{m}$, тогда $A = FS\left(1 + \dfrac{M}{m}\right)$.

<u>Решение 3.</u> Скорость вытекающей воды определяется по формуле Торричелли:

$$u_1 = \sqrt{2gH} = 2\ \text{м/с}.$$

Мощность вытекающей струи

$P_1 = \dfrac{\mu u_1^2}{2} = \dfrac{S\rho u_1^3}{2} = 0{,}4$ Вт, где $\mu = u_1 S\rho$ – расход воды. Полезная мощность турбины $N_1 = mgv_1 = 0{,}02$ Вт. КПД турбины $\eta = \dfrac{N_1}{P_1} = 5$ %.

2. Во втором случае наличие избыточного давления газа над поверхностью воды эквивалентно добавочному столбу воды:

$$h = \frac{p - p_o}{\rho g} = \frac{\Delta p}{\rho g}\ .$$

Скорость вытекающей струи $u_2 = \sqrt{2g(H+h)} \Rightarrow h = \dfrac{u_2^2}{2g} - H$.

Мощность струи $P_2 = \dfrac{N_2}{\eta} = \dfrac{mgv_2}{\eta} = 1$ Вт.

Скорость вытекающей струи $u_2 = \sqrt[3]{\dfrac{2P_2}{S\rho}} \approx 2{,}7$ м/с.

Избыточное давление газа над водой $\Delta p = \rho g h = \dfrac{1}{2}\rho u_2^2 - \rho g H = 1600$ Па. Задачу можно так же решить с помощью уравнения Бернулли.

Решение 4. При разомкнутом противоположном конце линии ее сопротивления выражаются формулами:

$$R_1 = 2\rho l + R_x,\ R_2 = 2\rho(L-l) + R_x. \quad (1)$$

При закороченных противоположных концах:

$$r_1 = 2\rho l + \frac{2\rho(L-l)R_x}{2\rho(L-l)+R_x},\ r_2 = 2\rho(L-l) + \frac{2\rho l R_x}{2\rho l + R_x}. \quad (2)$$

Подставляя из (1) значения $2\rho l$ и $2\rho(L-l)$ в формулы (2), получим:

$$R_x^2 = R_2(R_1 - r_1),\ R_x^2 = R_1(R_2 - r_2), r_2 = \frac{R_1R_2 - R_x^2}{R_1} \Rightarrow R_x = 2{,}0 \text{ Ом},\ r_2 = 7{,}0 \text{ Ом}.$$

Далее, из (1) получим:

$$l = \frac{R_1 - R_x}{2\rho} = 2{,}0 \cdot 10^3 \text{ м},\ L - l = \frac{R_2 - R_x}{2\rho} = 6{,}0 \cdot 10^3 \text{ м},\ L = 8{,}0 \text{ км}.$$